ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

Ю.А.Ананьев, А.Я.Бекшаев

Введена полная матрица вторых моментов, включающая ранее не рассматривавшиеся элементы, соответствующие перекрестным произведениям пространственных и угловых координат. С помощью использования оптической функции Вигнера найдены законы преобразования этой матрицы в оптических системах с произвольным астигматизмом. Выяснены наиболее общие свойства матрицы; показано, что ее применение позволяет обобщить определение "критерия качества" на случай пучков с произвольной структурой и неполной когерентностью.

Выяснено, что, в отличие от ранее изученного случая прямоугольной симметрии, в ее отсутствие существование "встроенного Гауссова пучка" со сходным поведением моментов возможно лишь для специального класса трехмерных пучков. Описаны характеристики этого класса. Рассмотрены способы моделирования произвольных матриц моментов с помощью пучков заданного вида и некоторые задачи по нахождению оптических систем, осуществляющих желательные преобразования матрицы моментов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Простота, лаконичность и универсальность законов распространения Гауссовых и других пучков, составляющих моды устойчивых резонаторов (см., напр., [1, 2]), стимулировали усилия по поиску аналогичных законов для более широких классов пучков, соответствующих разнообразным реальным источникам излучения [3 - 5]. В последнее время достигнут значительный прогресс в описании эволюции моментов пространственного и углового распределений интенсивностей реальных параксиальных пучков (метод моментов [6 - - 10]). В частности, установлено, что определенные комбинации вторых центральных моментов преобразуются оптическими системами подобно параметрам идеального Гауссова пучка [8 - 10]. Это позволяет при анализе тех характеристик излучения, которые удовлетворительно описываются вторыми моментами, в полной мере использовать теорию преобразований гауссовых пучков со всеми сопутствующими выгодами.

Однако почти все имеющиеся в литературе результаты относятся к случаю, когда и пучок, и преобразующая система обладают прямоугольной симметрией. Это означает, что рассмотренные задачи являются, по существу, двумерными, и полноценной трехмерной картины поведения моментов до сих пор не существует. Тем самым ценность метода моментов заметно снижается, а его практическая полезность ограничивается рядом важных, но все же сугубо частных случаев. Настоящая работа посвящена, в основном, устранению указанного пробела. В ней введена полная матрица вторых моментов, включающая оставленные без внимания "перекрестные" моменты с произведениями пространственной и угловой координат. Использование матричной теории оптических систем с произвольным астигматизмом [11, 12] позволяет дать исчерпывающее описание преобразований этой матрицы у любого параксиального пучка.

В полученной систематизированной и унифицированной картине находят себе место и многие известные результаты; в частности, удается выяснить смысл и пределы применимости аналогий с идеальным гауссовым пучком, обобщить и проанализировать введенную в [13] концепцию "качества" пучка M^2 и т.п. В практическом плане результаты могут пригодиться для расчета оптических систем, предназначенных для формирования реальных пучков со сложной пространственной структурой, и для измерения этой структуры.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОМЕНТОВ

Рассмотрим квазимонохроматический световой пучок, распространяющийся вдоль оси z в среде с действительным показателем преломления n_0. В любом поперечном сечении z = const распределение энергии излучения по пространственным $\vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ и угловым $\vec{p} = \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \end{vmatrix}$ координатам можно полностью охарактеризовать плотностью $I(\vec{r}, \vec{p})$. В геометро-оптическом пределе $\vec{p} = \dfrac{d\vec{r}}{dz}$, функция $I(\vec{r}, \vec{p})$ совпадает с плотностью распределения лучей в фазовом ($\vec{r}, \vec{p}$)-пространстве [14]. При переходе к дифракционному приближению $\vec{p}$ становится Фурье-сопряженной по отношению к $\vec{r}$ переменной, а I($\vec{r}, \vec{p}$) может быть отождествлена с оптической функцией Вигнера (функцией Вольфа) [15, 16]

$$I(r,p) = \frac{1}{\lambda^2} \int \Gamma\,(\vec{r} + \vec{r}\,'/2,\ \vec{r} - \vec{r}\,'/2) \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\,'\right)\right] (dr'), \qquad (1)$$

где k = $2\pi\ /\ \lambda$ - волновое число излучения в вакууме, (dr') = dx'dy',
$\Gamma\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right)$ - функция пространственной когерентности. Последняя связана с обычно используемой комплексной амплитудой пучка u формулой

$$\Gamma\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right) = \left\langle u\left(\vec{r}_1\right) u^*\left(\vec{r}_2\right)\right\rangle \qquad (2)$$

(угловые скобки означают статистическое усреднение); поскольку рассмотрение относится к фиксированной частоте, (2) имеет также смысл взаимного спектра мощности сигналов в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ на данной частоте [17]. В случае когерентного пучка усреднение в (2) не требуется, и функция (1) непосредственно выражается через u($\vec{r}$) или ее Фурье-трансформанту $U\left(\vec{p}\right) = \dfrac{1}{\lambda} \int u\left(\vec{r}\right) \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\right)\right]\left(dr\right)$:

$$I\left(\vec{r}, \vec{p}\right) == \frac{1}{\lambda^2} \int u\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r}\,'\right)\ u^*\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{r}\,'\right) \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\,'\right)\right]\left(dr'\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int U\left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}\,'\right)\ U^*\left(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{p}\,'\right) \exp\left[ik\left(\vec{p}\,', \vec{r}\right)\right]\left(d\vec{p}\,'\right). \qquad (3)$$

Функция Вигнера обладает рядом важнейших свойств плотности вероятности [15]; в частности, она действительна; распределения интенсивности и силы света получаются как маргинальные распределения для I($\vec{r}, \vec{p}$):

$$\left\langle \left|u\left(\vec{r}\right)\right|^2 \right\rangle = \int I\left(\vec{r}, \vec{p}\right)\left(dp\right), \quad \left\langle \left|U\left(\vec{p}\right)\right|^2 \right\rangle = \int I\left(\vec{r}, \vec{p}\right)\left(dr\right),$$

а интеграл от I($\vec{r}, \vec{p}$) по всему ($\vec{r}, \vec{p}$) - пространству определяет полный поток энергии, переносимый пучком. Нормировка

$$\int I\left(\vec{R}\right)\left(dR\right) = 1\,, \qquad (4)$$

где $\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{vmatrix}$ и (dR)=(dr)(dp), соответствует единичному потоку и позволяет вычислить средние по сечению пучка значения любой функции лучевых координат f($\vec{R}$) с помощью соотношения

$\overline{f(\vec{R})} = \int I(\vec{R}) f(\vec{R}) (dR)$ (здесь и далее черта обозначает усреднение по сечению пучка). В частности, все первые моменты можно представить
в виде матрицы-столбца

$$\vec{R}_0 = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \end{vmatrix} = \int \vec{R} I(\vec{R}) (dR); \qquad (5)$$

вторые моменты, которые будут основным предметом дальнейшего анализа, подобным же образом представляются в виде 4-рядной квадратной матрицы

$$\frac{1}{2k}\mathbf{\hat{Q}} = \frac{1}{2k}\begin{Vmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} \end{Vmatrix} = \int \vec{R}\tilde{\vec{R}} I(\vec{R}) (dR), \qquad (6)$$

где волнистая линия означает транспонирование ($\tilde{\vec{R}} = \begin{vmatrix} x & y & p_x & p_y \end{vmatrix}$),

$\hat{Q}_{lm}$ (l,m =1, 2) представляют собой 2x2 -блоки матрицы $\hat{Q}$, множитель $1/2k$ введен для удобства выкладок в последующих разделах.

Заметим, что значения моментов (5) и (6) зависят от выбора начала координат в ($\vec{r}, \vec{p}$)-пространстве. В частности, если в (6) принять за начало отсчета точку $\vec{R}_0$, то получим матрицу центральных моментов $\hat{Q} = \hat{Q}_c$, определяемую только формой распределения I($\vec{r}, \vec{p}$). Возвращаясь в исходную систему координат, из (6) нетрудно найти

$$\hat{Q} = \hat{Q}_c + 2k\vec{R}_0\tilde{\vec{R}}_0 \quad , \qquad (7)$$

и, таким образом, знания центральных вторых моментов и положения "центра тяжести" пучка достаточно для нахождения моментов при любом выборе начала отсчета. Это говорит о важности рассмотрения именно центральных моментов; однако, поскольку большинство последующих результатов не зависит от сдвигов системы лучевых координат, мы будем иметь дело, как правило, с общей матрицей моментов $\hat{Q}$, обращаясь к $\hat{Q}_c$ только тогда, когда явный учет центральности необходим. Излишне говорить, что все выводы, справедливые для $\hat{Q}$, годятся и для $\hat{Q}_c$, но не наоборот.

Для когерентных световых пучков равенства (3), (5) и (6) определяют явную связь моментов с комплексными амплитудами u($\vec{r}$) и U($\vec{p}$), что позволяет обобщить формулы для моментов, содержащиеся в [10] (см. Приложение А). В важном частном случае астигматического гауссова пучка с $u(\vec{r}) \propto \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\vec{r}, \hat{d}\cdot\vec{r}\right)\right]$, где $\hat{d} = \hat{d}_1 + i\hat{d}_2$ - симметричная комплексная матрица, применение формул этого приложения дает матрицу центральных вторых моментов в виде

$$\hat{Q}_g = \begin{Vmatrix} \hat{d}_2^{-1} & \hat{d}_2^{-1}\hat{d}_1 \\ \hat{d}_1\hat{d}_2^{-1} & \hat{d}_1\hat{d}_2^{-1}\hat{d}_1 + \hat{d}_2 \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

который будет часто использоваться в дальнейшем.

Заметим, что, согласно (5) и (6), при повороте системы координат в сечении пучка элементы $\vec{R}_0$ преобразуются так же, как составляющие лучевого вектора $\vec{R}$, а элементы матрицы $\hat{Q}$ - как произведения этих составляющих. Это делает очевидными формулы преобразования моментов, приведенные, например, в [9]. Кроме того, такой закон преобразования моментов означает, что они являются частными проявлениями инвариантных физических объектов, связанных с пучком: вектора (первые моменты) и тензора второго ранга [18] (вторые моменты); чисто пространственные моменты, входящие в матрицу $\hat{Q}_{11}$, и чисто угловые ($\hat{Q}_{22}$) также образуют тензоры второго ранга, но меньшей размерности. Однако гораздо важнее то, что подобная согласованность преобразований различных элементов $\vec{R}_0$ и $\hat{Q}$ имеет место и при прохождении пучка через произвольную оптическую систему; поэтому изучение свойств и законов преобразования отдельных моментов должно основываться на рассмотрении свойств и поведения $\vec{R}_0$ и $\hat{Q}$ как целостных объектов.

Простейшие свойства набора вторых моментов вытекают сразу из (6). Очевидно, матрица $\hat{Q}$ симметрична: $\hat{Q}_{11} = \tilde{\hat{Q}}_{11}$, $\hat{Q}_{22} = \tilde{\hat{Q}}_{22}$, $\hat{Q}_{12} = \tilde{\hat{Q}}_{21}$, т.е. из шестнадцати элементов $\hat{Q}$ независимыми могут быть не более десяти. Кроме того, как показано в Приложении Б, для любого ненулевого вектора $\vec{R}_a = \begin{vmatrix} \vec{r}_a \\ \vec{p}_a \end{vmatrix}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2k}\left(\vec{R}_a, \hat{Q}\vec{R}_a\right) = \int \tilde{\vec{R}}_a \vec{R}\tilde{\vec{R}}\vec{R}_a I\left(\vec{R}\right)\left(dR\right) = \int \left(\vec{R}_a, \vec{R}\right)^2 I\left(\vec{R}\right)\left(dR\right) > 0 \ ,$$

означающее положительную определенность матрицы $\hat{Q}$. Это обстоятельство порождает ряд полезных следствий [19], самые необходимые из которых приведены в том же Приложении. Для блоков матрицы $\hat{Q}$ оттуда вытекают не только интуитивно очевидные выводы $\hat{Q}_{11} > 0$, $\hat{Q}_{22} > 0$, но и соотношения $\hat{Q}_{11} > \hat{Q}_{12}\hat{Q}_{22}^{-1}\hat{Q}_{21}$, $\hat{Q}_{22} > \hat{Q}_{21}\hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12}$ (смысл знаков >, < для матриц разъясняется в Приложении Б), а также соотношение

$$\det\hat{Q} \le \det\hat{Q}_{11} \cdot \det\hat{Q}_{22}. \qquad (9)$$

Можно показать, что равенство здесь достигается лишь когда $\hat{Q}_{12} =$ $= \hat{Q}_{21} = 0.$

Заметим, что благодаря положительной полуопределенности матрицы из (7) следует $\hat{Q} \ge \hat{Q}_c$, и поэтому матрица центральных моментов выделяется среди всех матриц вторых моментов свойством минимальности: согласно п. 3 Приложения Б, она имеет наименьшие собственные значения, шпур и определитель.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОМЕНТОВ ПАРАКСИАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Особенно полезными оказываются представления (5), (6) при изучении эволюции моментов пучка в оптических системах без потерь. Очевидно, здесь достаточно установить правила преобразования $\vec{R}$ и I($\vec{R}$).

Как известно, при прохождении пучка через оптическую систему без потерь каждый лучевой вектор испытывает линейное преобразование

$$\vec{R}' = \hat{H}\vec{R} \ , \qquad (10)$$

причем действительная 4x4 матрица $\hat{H} = \begin{Vmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{Vmatrix}$ ($\hat{A} \ldots \hat{D}$ - ее блоки 2x2) удовлетворяет условиям $\det\hat{H} = 1$, $\hat{H}^{-1} = \begin{Vmatrix} \tilde{\hat{D}} & -\tilde{\hat{B}} \\ -\tilde{\hat{C}} & \tilde{\hat{A}} \end{Vmatrix}$. Эти условия эквивалентны требованию $\tilde{\hat{H}}\hat{J}\hat{H} = \hat{J}$, где $\hat{J} = \begin{Vmatrix} 0 & \hat{J}_s \\ -\hat{J}_s & 0 \end{Vmatrix}$ ($\hat{J}_s$ - единичная 2x2 - матрица), поэтому $\hat{H}$ является симплектичной [20]. Преобразование же функции Вигнера сводится к подстановке в нее выражений, представляющих начальные лучевые координаты через конечные [15]: $I'\left(\vec{R}'\right) = I\left(\hat{H}^{-1}\vec{R}'\right)$. В итоге, например,

из уравнения (5) получаем

$$\vec{R}_0' = \int \vec{R}' \; I'\left(R'\right)\left(dR'\right) = \int \vec{R}' \; I\left(\hat{H}^{-1}\vec{R}'\right)\left(dR'\right) = \int \hat{H}\vec{R}I\left(\vec{R}\right)\left|\frac{d\vec{R}'}{d\vec{R}}\right|\left(dR\right).$$

В последнем равенстве выполнена замена переменных (10), а $\left|\frac{d\vec{R}'}{d\vec{R}}\right|$ -

- якобиан этого преобразования, равный $\det \hat{H} = 1$. Поскольку $\hat{H}$ не зависит от $\vec{R}$, отсюда следует

$$\vec{R}_0' = \hat{H}\vec{R}_0 \;, \qquad (11)$$

что является достаточно тривиальным обобщением известных формул [10], описывающих эволюцию "центра тяжести" пучка.

Аналогично для матрицы вторых моментов получается закон преобразования

$$\hat{Q}' = \hat{H}\hat{Q}\tilde{\hat{H}} \;, \qquad (12)$$

который удобно представить в "блочном" виде

$$\hat{Q}' = \left\| \begin{matrix} \hat{A}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{A}} + \hat{A}\hat{Q}_{12}\tilde{\hat{B}} + \hat{B}\hat{Q}_{21}\tilde{\hat{A}} + \hat{B}\hat{Q}_{22}\tilde{\hat{B}} & \hat{A}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{C}} + \hat{A}\hat{Q}_{12}\tilde{\hat{D}} + \hat{B}\hat{Q}_{21}\tilde{\hat{C}} + \hat{B}\hat{Q}_{22}\tilde{\hat{D}} \\ \hat{C}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{A}} + \hat{C}\hat{Q}_{12}\tilde{\hat{B}} + \hat{D}\hat{Q}_{21}\tilde{\hat{A}} + \hat{D}\hat{Q}_{22}\tilde{\hat{B}} & \hat{C}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{C}} + \hat{C}\hat{Q}_{12}\tilde{\hat{D}} + \hat{D}\hat{Q}_{21}\tilde{\hat{C}} + \hat{D}\hat{Q}_{22}\tilde{\hat{D}} \end{matrix} \right\| . \qquad (12a)$$

Видно, что в двумерном случае отсюда получаются формулы [10] для вторых моментов.

Отметим, что в разъюстированных оптических системах преобразование $\vec{R}$ в $\vec{R}'$ описывается с помощью лучевых матриц 5x5 [2]; законы эволюции $\hat{Q}$ в этом случае кратко изложены в Приложении В. Однако если в качестве оптической оси разъюстированной оптической системы выбран какой-либо луч, повинующийся законам геометрической оптики, становится справедливым (10) с матрицей 4x4. Центр тяжести пучка в системах рассматриваемого класса всегда следует вдоль такого луча (смотри это же Приложение), поэтому все проведенное в настоящей статье рассмотрение сохраняет силу применительно либо к центральным моментам в любых системах без потерь, включая разъюстированные, либо к любым моментам (включая нецентральные) в системах без разъюстировок.

Полезно также знание дифференциальной формы уравнений эволюции матрицы моментов в линзоподобной среде, показатель преломления которой зависит от координат согласно формуле $n\left(\vec{r}, z\right) = n_0\left(z\right) - \left(\vec{r}, \hat{n}_2\left(z\right)\vec{r}\right)/2$,

где $\hat{n}_2$ (z) -симметричная матрица. Зная дифференциальные уравнения для блоков матрицы $\hat{H}$ [11], из (11) и (12) легко найти

$$\frac{d\vec{R}_0}{dz} = L(z)\vec{R}_0, \quad \frac{d\hat{Q}}{dz} = L(z)\hat{Q} + \hat{Q}L(z), \quad L(z) = \left\| \begin{matrix} 0 & \hat{J}_s / n_0(z) \\ -\hat{n}_2(z) & 0 \end{matrix} \right\| \;, \qquad (13)$$

или $\dfrac{d\hat{Q}_{11}}{dz} = \dfrac{1}{n_0(z)}\left(\hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{21}\right), \quad \dfrac{d\hat{Q}_{22}}{dz} = -\hat{n}_2(z)\hat{Q}_{12} - \hat{Q}_{21}\hat{n}_2(z),$

$$\frac{d\hat{Q}_{12}}{dz} = \frac{1}{n_0(z)}\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{11}\hat{n}_2(z).$$

Уравнения (11)- (13) в своей совокупности полностью описывают преобразования первых и вторых моментов любого пучка оптической системой самого общего вида. Их форма позволяет легко установить некоторые общие закономерности таких преобразований. Например, благодаря унимодулярности матрицы $\hat{H}$ из (12) следует инвариантность определителя матрицы моментов

$$\det \hat{Q}' = \det \hat{Q} \ . \qquad (14)$$

Для дальнейших выводов рассмотрим матрицу $\hat{N} = \hat{Q}\hat{J}\hat{Q}$ с блоками

$$\hat{N} = \begin{Vmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} \\ \hat{N}_{21} & \hat{N}_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{Q}_{11}\hat{Q}_{21} - \hat{Q}_{12}\hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{11}\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{12}^2 \\ \hat{Q}_{21}^2 - \hat{Q}_{22}\hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{21}\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{22}\hat{Q}_{12} \end{Vmatrix}. \quad . \qquad (15)$$

Из-за симплектичности матрицы $\hat{H}$ $\hat{N}' = \hat{Q}'\hat{J}\hat{Q}' = \hat{H}\hat{Q}\tilde{\hat{H}}\hat{J}\hat{H}\hat{Q}\tilde{\hat{H}} = \hat{H}\hat{Q}\hat{J}\hat{Q}\tilde{\hat{H}} = \hat{H}\hat{N}\tilde{\hat{H}}$,

т.е. $\hat{N}$ преобразуется по тому же правилу, что и $\hat{Q}$. Это правило можно также записать в виде

$$\hat{N}'\hat{J} = \hat{H}\left(\hat{N}\hat{J}\right)\hat{H}^{-1}. \qquad (16)$$

Ясно, что матрица $\hat{N}$ тесно связана с матрицей моментов, и любой закономерности, которую удается найти для ее элементов, соответствует, согласно (15), некоторая закономерность для элементов $\hat{Q}$. В то же время исследовать $\hat{N}$, вообще говоря, легче, так как эта матрица всегда антисимметрична ($\hat{N} = -\tilde{\hat{N}}$) и поэтому содержит не более шести независимых элементов. Рассмотрим ее свойства более внимательно.

Во-первых, легко заметить, что уравнение (16) имеет вид преобразования подобия [19], инварианты которого хорошо известны. Простейшие из них - $\det\left(\hat{N}\hat{J}\right)$ и $Sp\left(\hat{N}\hat{J}\right)$, и если первый сводится к уже найденному (14), то второй

$$Sp\left(\hat{N}\hat{J}\right) = Sp\left(\hat{N}_{21} - \hat{N}_{12}\right) = -2Sp\hat{N}_{12} = -2Sp\left(\hat{Q}_{11}\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{12}^2\right) \qquad (17)$$

приводит, вообще говоря, к новому инварианту преобразования (12) (заметим, однако, что инварианты (14) и (17) совпадают в двумерном случае, когда Q_{lm} - скаляры).

Во-вторых, уравнение (16) определяет также условие инвариантности самой матрицы $\hat{N}$, заключающееся в коммутативности $\hat{N}\hat{J}$ и $\hat{H}$ хотя бы в одном сечении системы. Оно выполняется в следующих случаях:

а) если $\hat{N}_{11} = \hat{N}_{22} = 0$, а $\hat{N}_{12} = -\hat{N}_{21}$ - симметричные матрицы, которые коммутируют со всеми блоками $\hat{H}$, что возможно либо когда последние скалярны, то есть оптическая система обладает осевой симметрией, либо когда $\hat{N}_{12}$ и все блоки $\hat{H}$ диагональны (этот случай сводится к двумерному);

б) если $\hat{N}\hat{J}$ - скалярная матрица; поскольку $\hat{J}^2 = -\hat{E},$ где $\hat{E}$ - единичная матрица 4x4, это эквивалентно выполнению в каком-либо сечении условия $\hat{N} = \gamma\hat{J}$, где γ - некоторое число (отсюда, между прочим, следует, что в двумерном случае, когда $\hat{J} = \hat{J}_a$, где

$$\hat{J}_a = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (18)$$

- простейшая антисимметричная матрица, $\hat{N}$ всегда инвариантна, ибо, будучи также антисимметричной, она обязательно кратна $\hat{J}_a$).

Эти сведения свидетельствуют в пользу того, что свойство изменяемости матрицы $\hat{N}$ само по себе отражает какие-то характерные особенности эволюции трехмерных пучков, а класс пучков, обладающих инвариантными $\hat{N}$ и ведущих себя подобно двумерным, заслуживает особого рассмотрения. Как будет видно в дальнейшем, выделение такого класса действительно оказывается важным; по этой причине выполним более тщательный анализ условия неизменяемости $\hat{N}$. Оно как будто сводится к независимым требованиям, предъявляемым к $\hat{N}_{11}$, $\hat{N}_{22}$ и $\hat{N}_{12}$. Однако можно показать, что если $\hat{Q}_{12}$ и $\hat{Q}_{21}$ не являются антисимметричными матрицами и

$$\hat{N}_{12} = \hat{Q}_{11}\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{12}^2 = \gamma \hat{J}_s \qquad (19)$$

(напомним, что $\hat{J}_s$ - единичная матрица 2x2), то

$$\hat{N}_{11} = \hat{Q}_{11}\hat{Q}_{21} - \hat{Q}_{12}\hat{Q}_{11} = 0\,. \qquad (20)$$

Поскольку из (19) в данном случае следует также и равенство $\hat{N}_{22} = 0$, то выполнение этого условия здесь полностью обеспечивает постоянство $\hat{N}$. Если же $\hat{Q}_{12}$ и $\hat{Q}_{21}$ антисимметричны, то (20) перестает быть прямым следствием (19); тогда условия (20) и $\hat{N}_{22} = 0$ остаются эквивалентными друг другу, но должны рассматриваться независимо от (19).

4. ИНВАРИАНТЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ МОМЕНТОВ

Анализ эволюции вторых моментов, выполненный в предыдущем разделе, позволил установить существование двух инвариантов (14) и (17) преобразования (12), а также выделенного класса трехмерных пучков, ведущих себя подобно двумерным. Эти, на первый взгляд, разрозненные факты на самом деле тесно взаимосвязаны.

Действительно, пусть известны все инварианты преобразования (12). Тогда для каждого пучка можно вычислить совокупность величин, которые сохраняются при его прохождении через любую оптическую систему рассматриваемого типа и потому отражают более глубокие свойства пучка, чем те внешние формы, которые придает ему конкретный способ формирования. Очевидно, и принадлежность пучка к тому или иному классу полностью определяется набором его инвариантов, а сами классы характеризуются некоторыми соотношениями между инвариантами, общими для всех элементов класса.

Существование инвариантов (14) и (17) было достаточно очевидным. Должны иметь место и другие инварианты преобразования (12) (например, суммы диагональных миноров [19] матрицы $\hat{N}\hat{J}$ или преобразующейся при прохождении оптической системы так же матрицы $\hat{Q}\hat{J}$), но нет уверенности, что они не являются комбинациями уже найденных.

Вместо того, чтобы перебирать подходящие сочетания элементов упомянутых матриц, целесообразно применить другой подход. Суть его состоит в том, чтобы отыскать наиболее простой (принято называть его каноническим) вид, к которому приводится произвольная матрица моментов посредством преобразования (12). Очевидно, что чем меньше произвольных элементов будет содержать полученная в результате применения (12) матрица $\hat{Q}'$, тем меньше останется в ней "внешних форм", и в конце концов ее элементы будут определяться только инвариантами. Как будет видно, такой путь довольно быстро ведет к цели - отысканию всех инвариантов; попутно находятся и способы преобразования произвольной матрицы моментов к некоторым частным видам.

Отметим, что существует гарантия возможности осуществления указанных способов на практике. Дело в том, что любое симплектическое преобразование лучевых координат (10) может быть реализовано с помощью некоторой реальной оптической системы. Этот факт доказывается в [21] с привлечением теории групп Ли, но его можно обосновать много проще. Действительно, несложные выкладки показывают, что, например, оптическая система только из трех астигматических линз при соответствующем выборе параметров уже способна воспроизвести любую симплексическую матрицу передачи.

Приступая к последовательному упрощению матрицы моментов, начнем с ее преобразования к блочно-диагональному виду. Двумерный вариант этой задачи - "коллимирование" пучка - решается с помощью простого фазового корректора - линзы [7, 9]. Как легко убедиться (см. (12а)), трехмерный аналог такого корректора с матрицей

$$\hat{H} = \begin{Vmatrix} \hat{J}_s & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{J}_s \end{Vmatrix} , \qquad (21)$$

где $\hat{\alpha}$ - симметричная 2x2-матрица (требование ее симметричности, как и симметричности использовавшейся в предыдущем разделе матрицы $\hat{n}_2$, вытекает из необходимости симплектичности матрицы $\hat{H}$), преобразует недиагональные блоки матрицы моментов к виду

$$\hat{Q}'_{12} = \tilde{\hat{Q}}'_{21} = -\hat{Q}_{11}\hat{\alpha} + \hat{Q}_{12} . \qquad (22)$$

В сочетании с требованием симметрии α отсюда следует, что корректор способен обратить в нуль недиагональные элементы матрицы $\hat{Q}$ и тем самым преобразовать $\hat{Q}$ к блочно-диагональному виду лишь если матрица $\hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12}$ симметрична; в этом случае матрица его "оптической силы" должна быть равна $\hat{\alpha} = \hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12}$. Требование симметрии $\hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12}$ и условие (20) эквивалентны друг другу; поэтому попробуем теперь найти способ преобразовать любой пучок так, чтобы это условие оказалось выполненным.

Поскольку матрица $\hat{N}$ преобразуется подобно $\hat{Q}$, то, согласно (12а) и (15), для этого достаточно найти такую матрицу $\hat{H}$, блоки которой $\hat{A}$ и $\hat{B}$ подчиняются уравнению $\hat{N}'_{11} = \hat{A}\hat{N}_{11}\tilde{\hat{A}} + \hat{A}\hat{N}_{12}\tilde{\hat{B}} + \hat{B}\hat{N}_{21}\tilde{\hat{A}} + \hat{B}\hat{N}_{22}\tilde{\hat{B}} = 0$. Из симплектичности $\hat{H}$ следует, что матрица $\hat{A}^{-1}\hat{B} \equiv \hat{\beta}$ должна быть симметрична. С учетом этого обстоятельства данное уравнение преобразуется к виду

$$\hat{N}_{11} + \hat{N}_{12}\hat{\beta} + \hat{\beta}\,\hat{N}_{21} + \hat{\beta}\,\hat{N}_{22}\hat{\beta} = 0 . \qquad (23)$$

Ввиду антисимметрии $\hat{N}_{11}$ и $\hat{N}_{22}$ их можно записать в форме $\hat{N}_{11} = s_1\hat{J}_a$, $\hat{N}_{22} = s_2\hat{J}_a$, где s_1 и s_2 - скаляры, $\hat{J}_a$ - матрица (18). Тогда $\hat{\beta}\hat{N}_{22}\hat{\beta} = s_2\hat{\beta}\hat{J}_a\hat{\beta} = s_2 \det\hat{\beta}\cdot\hat{J}_a$; наконец, $\hat{\beta}\hat{N}_{21} + \hat{N}_{12}\hat{\beta} = \hat{N}_{12}\hat{\beta} - \hat{\beta}\tilde{\hat{N}}_{12} = -Sp\left(\hat{N}_{12}\hat{\beta}\,\hat{J}_a\right)\cdot\hat{J}_a$. Таким образом, вся левая часть (23) содержит множителем $\hat{J}_a$, и это уравнение сводится к скалярному $s_1 + s_2\det\hat{\beta} - Sp\left(\hat{N}_{12}\hat{\beta}\,\hat{J}_a\right) = 0$. Оно налагает на три независимых элемента матрицы $\hat{\beta}$ только одно условие и потому имеет множество решений. Выбрав какое-либо из них, далее можно в качестве матрицы преобразования взять любую симплектическую матрицу с данным значением $\hat{A}^{-1}\hat{B}$, например

$\hat{H} = \begin{Vmatrix} \hat{A} & \hat{A}\hat{\beta} \\ 0 & \tilde{\hat{A}}^{-1} \end{Vmatrix}$, где $\hat{A}$ - произвольная 2x2-матрица.

Можно потребовать, чтобы матрицы $\hat{\beta}$ и $\hat{A}$ были диагональны, а произведение $\hat{A}\hat{\beta}$ являлось скалярной матрицей. Тогда $\hat{H}$ становится матрицей астигматического телескопа с различными коэффициентами увеличения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Если же выполняется условие $\left(\nu_{12} - \nu_{21}\right)^2 - 4s_1s_2 \geq 0$, где ν_{12} и ν_{21} - недиагональные элементы матрицы $\hat{N}_{12}$, то можно положить $\beta_{11} = \beta_{22}$;

таким образом, здесь необходимый результат достигается с помощью обычного телескопа или даже слоя однородного пространства.

Теперь задачу нахождения матрицы $\hat{H}$, преобразующей произвольную матрицу моментов к блочно-диагональному виду, можно считать решенной: искомая матрица представима в виде произведения только что найденной матрицы, обеспечивающей выполнение условия (20), на матрицу подходящего фазового корректора. Осталось еще рассмотреть упрощение матрицы моментов вида

$\hat{Q} = \begin{Vmatrix} \hat{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{22} \end{Vmatrix}$. Очевидно, преобразующая $\hat{H}$ -матрица должна, по крайней мере, не нарушать блочно-диагонального вида $\hat{Q}$, для чего она должна иметь форму $\hat{H} = \begin{Vmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \tilde{\hat{A}}^{-1} \end{Vmatrix}$. Применение (12) с такой матрицей $\hat{H}$ к $\hat{Q}$ дает $\hat{Q}' = \begin{Vmatrix} \hat{A}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{\hat{A}}^{-1}\hat{Q}_{22}\hat{A}^{-1} \end{Vmatrix}$. Поскольку $\left(\hat{Q}'_{22}\right)^{-1} = \left(\tilde{\hat{A}}^{-1}\hat{Q}_{22}\hat{A}^{-1}\right)^{-1} =$

$= \hat{A}Q_{22}^{-1}\tilde{\hat{A}}$, то при переходе от $\hat{Q}$ к $\hat{Q}'$ матрицы $\hat{Q}_{11}$ и $\hat{Q}_{22}^{-1}$ испытывают одно и то же преобразование конгруэнции [19]. Так как обе они являются симметричными и положительно определенными (смотри приложение Б, п. 1), можно подобрать такую матрицу $\hat{A}$, чтобы матрицы $\hat{A}\hat{Q}_{11}\tilde{\hat{A}}$ и $\hat{A}\hat{Q}_{22}^{-1}\tilde{\hat{A}}$ были диагональны [19]. Вместе со второй из них оказывается диагональной и обратная ей матрица $\tilde{\hat{A}}^{-1}\hat{Q}_{22}\hat{A}^{-1}$, а, следовательно, и $\hat{Q}'$ в целом. Запишем последнюю в форме $\hat{Q}' = diag\left[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\right]$ (все μ, конечно, положительны).

Подвергая теперь $\hat{Q}'$ преобразованию (12) с диагональной $\hat{H}$ -матрицей самого общего вида

$$\hat{H} = diag\left[a, b, a^{-1}, b^{-1}\right], \qquad (24)$$

где a и b - произвольные числа, находим

$\hat{Q}'' = diag\left[\mu_1 a^2, \mu_2 b^2, \mu_3 a^{-2}, \mu_4 b^{-2}\right]$. Отсюда видно, что хотя и существуют различные возможные варианты результирующей диагональной матрицы моментов, однако величины произведений первого элемента на третий и второго на четвертый остаются неизменными; обозначим их Λ_x^2 и Λ_y^2 соответственно. Выбрав подходящие a и b, получаем $\hat{Q}''$ в виде

$$\hat{Q}_0 = diag\left[\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_x, \Lambda_y\right] \quad . \qquad (25)$$

Таким образом, матрица вторых моментов любого пучка может быть преобразована оптической системой к виду, содержащему только два независимых параметра; значит, число независимых инвариантов преобразования (12) не превосходит двух. С другой стороны, это число не может быть и меньше двух - числа уже найденных в разделе 3 независимых инвариантов. Следовательно, представление матрицы моментов (25) является простейшим и может считаться каноническим (отметим, что именно такой вид имеют матрицы моментов трехмерных эрмитовых пучков, составляющих моды осесимметричных устойчивых резонаторов [2]), параметры же Λ_x, Λ_y так же, как $\det\hat{Q}$ и $Sp\ \hat{N}_{12}$, являются независимыми инвариантами и составляют полный набор.

Связь между двумя парами инвариантов установить нетрудно. Действительно, непосредственной подстановкой (25) в (15) получаем, что при диагональном представлении матрицы моментов

$$\hat{N}_{12} = diag\left[\Lambda_x^2, \Lambda_y^2\right], \qquad (26)$$

$$\det\hat{Q} = \Lambda_x^2\Lambda_y^2, \quad Sp\ \hat{N}_{12} = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2. \qquad (27)$$

Рассматривая (27) как уравнения относительно Λ_x^2 , Λ_y^2 и решая их, получаем простейший рецепт вычисления Λ_x и Λ_y по виду матрицы моментов: $\Lambda_{x,y}^2 = \frac{1}{2}Sp\ \hat{N}_{12} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2}Sp\ \hat{N}_{12}\right)^2 - \det\hat{Q}}$ (без нарушения общности рассмотрения можно для определенности считать $\Lambda_x \le \Lambda_y$).

Если (25) является матрицей центральных моментов, то параметры Λ_x и Λ_y обретают ясный физический смысл, ибо их взаимосвязь с "факторами качества" пучка M_x^2 и M_y^2 [9] становится вполне очевидной. Нетрудно показать, что $\Lambda_x = M_x^2$, $\Lambda_y = M_y^2$. Из свойств преобразования Фурье [9] или непосредственно из свойств функции Вигнера [15] легко выводятся неравенства $\Lambda_x \ge 1$, $\Lambda_y \ge 1$ (равенства здесь имеют место только для гауссовых пучков [9]), что с учетом (27) дает $\det\hat{Q} \ge 1$, $2\sqrt{\det\hat{Q}} \le Sp\ \hat{N}_{12} \le 1 + \det\hat{Q}$. Здесь использовано обозначение $\hat{Q}$ вместо $\hat{Q}_c$, потому что в силу отмеченной в разделе 2 минимальности $\hat{Q}_c$ эти соотношения справедливы и для матриц нецентральных моментов.

В случае центральных моментов $\det\hat{Q}_c$ и $Sp\ \hat{N}_{12}$ характеризуют пучок как таковой; при этом $\det\hat{Q}_c$ имеет смысл квадрата обобщенного "фактора качества" трехмерного пучка. Этот смысл сохраняется при произвольном астигматизме и асимметрии пучка, когда величины M_x^2, M_y^2, а, значит, и Λ_y , Λ_y не имеют наглядного истолкования.

В заключение заметим, что аналогичные рассуждения для двумерных пучков легко приводят к ожидаемому выводу о существовании для них только одного инварианта $\Lambda = M^2 \ge 1$ и о скалярности канонического представления матриц моментов.

5. ТИПЫ ПОВЕДЕНИЯ МАТРИЦ МОМЕНТОВ ТРЕХМЕРНЫХ ПУЧКОВ

Используем результаты предыдущего раздела для выяснения особенностей поведения и классификации световых пучков. Прежде всего рассмотрим гауссов пучок, матрица моментов которого описывается формулой (8). Из нее непосредственно следует $\det\hat{Q} = 1$, $Sp\ \hat{N}_{12} = 2$, чему соответствует $\Lambda_x = \Lambda_y = 1$. Очевидно, в каноническом представлении матрица моментов является единичной. Одинаковый вид канонического представления матриц самых разнообразных гауссовых пучков включая астигматические, "вращающиеся" и т.п. является отображением того факта, что все гауссовы пучки могут быть преобразованы друг в друга с помощью тех или иных оптических систем.

Рассмотрение пучков общего вида начнем с законов их распространения в пустом пространстве. Лучевая матрица участка пространства длиной z имеет блоки $\hat{A} = \hat{D} = \hat{J}_s$, $\hat{C} = 0$, $\hat{B} = z\hat{J}_s$. В результате ее подстановки в (12а) получаем

$$\hat{Q}_{11}'(z) = \hat{Q}_{11} + \left(\hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{21}\right)z + \hat{Q}_{22}z^2 \ ; \ \hat{Q}_{22}'(z) = \hat{Q}_{22} \ ;$$

$$\hat{Q}_{12}'(z) = \tilde{\hat{Q}}_{21}'(z) = \hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{22}z \qquad (28)$$

(в правых частях здесь стоят значения соответствующих матриц при z = 0). Из (28) в числе прочего вытекает, что форма и размер пучка в дальней зоне ($z \to \infty$) определяется начальным видом матрицы $\hat{Q}_{22}$, которая тем самым задает расходимость излучения. Если $\hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{21} = 0$, то все элементы описывающей распределение излучения по поперечным координатам матрицы $\hat{Q}_{11}$ являются квадратичными функциями z, и в плоскости z = 0 находится "перетяжка" пучка.

Проанализируем теперь возможность формирования "перетяжки" произвольного пучка в какой-либо плоскости с помощью помещаемого в эту плоскость фазового корректора; напомним, что его матрица в наиболее общем ее виде (21) имеет блоки $\hat{A} = \hat{D} = \hat{J}_s$, $\hat{B} = 0$ и $\hat{C} = -\hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha}$ - симметричная матрица 2x2 (смотри раздел 4). Из (22) следует, что $\hat{Q}'_{12} + \hat{Q}'_{21} = 0$, если $\hat{\alpha}$ удовлетворяет уравнению $\hat{Q}_{11}\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{Q}_{11} = \hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{21}$. Можно показать, что это уравнение всегда имеет единственное решение $\hat{\alpha} = \hat{K}$, где

$$\hat{K} = \hat{Q}_{11}^{-1}\left[\hat{Q}_{12} + \hat{J}_a Sp\left(\hat{Q}_{12}\hat{Q}_{11}\hat{J}_a\right) / \, Sp\ \hat{Q}_{11}\right] . \qquad (29)$$

Поскольку фазовый корректор с матрицей "оптической силы" $\hat{K}$ здесь создает "перетяжку", компенсируя имеющуюся до его прохождения эффективную кривизну волнового фронта, $\hat{K}$ является матрицей этой кривизны (скалярный ее аналог был введен в [7]).

Необходимо отметить, что равенство нулю суммы $\hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{21}$ еще не означает, что каждый из этих двух блоков равен нулю. В разделе 4 было показано, что приведение $\hat{Q}'$ к блочно-диагональному виду с помощью фазового корректора возможно лишь при выполнении условия (20). В противном случае сохранение недиагональных блоков делает справедливым, как это следует из формулы (9) и примечания к ней, неравенство $\det \hat{Q}'_{11} \det \hat{Q}'_{22} > \det \hat{Q}'$. Таким образом, в этом случае "перетяжка" хотя и формируется, однако произведение пространственной и угловой ширин пучка превышает то минимальное значение, которое может быть достигнуто с помощью диагонализирующих матрицу $\hat{Q}'$ более сложных, чем фазовый корректор, оптических систем.

Напомним, что (20) является одним из условий постоянства вспомогательной матрицы $\hat{N}$. Рассмотрим теперь пучки, для которых оказываются выполненными все эти условия. Нетрудно видеть, что их сходство с гауссовыми отнюдь не ограничивается тем обстоятельством, что в их "перетяжках" всегда реализуется минимально возможное для данного пучка значение произведения $\det \hat{Q}_{11} \det \hat{Q}_{22}$.

Действительно, как было показано в разделе 3, у таких пучков $\hat{N} = \gamma\,\hat{J}$, где γ - скаляр. Из (26) и (27) следует, что тогда $\Lambda_x^2 = \Lambda_y^2 = \gamma$, $\det \hat{Q} = \gamma^2$, $Sp\ \hat{N}_{12} = 2\gamma$. Таким образом, матрица вторых моментов в ее каноническом представлении хотя и не равна единичной, но является, как и у гауссовых пучков, скалярной.

Скалярность канонического представления означает, что данный пучок можно представить как результат преобразования некоторого исходного пучка со скалярной матрицей моментов. Эта матрица моментов, в свою очередь, отличается лишь постоянным множителем от матрицы моментов некоторого гауссова пучка, и в силу линейности преобразования (12) такая связь матриц будет сохраняться после прохождения этими пучками одних и тех же оптических систем.

По этим причинам пучки с инвариантными $\hat{N}$ вполне могут называться гауссоподобными. Продолжим перечень их аналогий с подлинными гауссовыми пучками.

Из (8) видно, что у гауссовых пучков $\hat{Q}_{11} = \hat{d}_2^{-1}$, то есть является матрицей, описывающей поперечное распределение интенсивности; тот же смысл может быть приписан блоку $\hat{Q}_{11}$ матрицы гауссоподобного пучка. Для гауссовых пучков $\hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21}\hat{Q}_{11}^{-1} = \hat{d}_1$, откуда следует, что и для гауссоподобных определяемая формулой (29) матрица $\hat{K}$, равная в этом случае $\hat{K} = \hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21}\hat{Q}_{11}^{-1}$, может считаться матрицей эффективной кривизны волнового фронта (скалярный аналог этой величины для двумерного случая был введен в [7]). В силу условий (19), (20) эта матрица симметрична и удовлетворяет соотношению $\hat{Q}_{22} = \hat{K}\hat{Q}_{11}\hat{K} + \nu\hat{Q}_{11}^{-1}$, которое имеет место и для гауссова пучка с $\gamma = 1$. Наконец, аналогом введенного в [7] скалярного параметра 1/q, где q - эффективный комплексный радиус кривизны, является матрица $\hat{T} = \hat{Q}_{11}^{-1}\hat{Q}_{12} + i\sqrt{\gamma}\ \hat{Q}_{11}^{-1}$, которая преобразуется по "правилу ABCD" подобно матрице гауссова пучка $\hat{d}$ (смотри [11]):
$$\hat{T}' = \left(\hat{C} + \hat{D}\hat{T}\right)\left(\hat{A} + \hat{B}\hat{T}\right)^{-1} .$$

Заметим, что благодаря скалярности канонического представления матриц моментов любых двумерных пучков в двумерном случае данная аналогия имеет место всегда, что было показано другим способом ранее в [8 - 10].

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ МОМЕНТОВ

Изложенный в [8 - 10] вариант метода моментов был удобен тем, что с точки зрения поведения вторых моментов любой двумерный пучок подобен некоему двумерному же "встроенному" гауссову пучку. В разделе 5 нами было показано, что в трехмерном случае такое подобие существует далеко не всегда; вместе с тем, привлекательность возможности свести анализ произвольного пучка к рассмотрению простого и хорошо изученного случая бесспорна и побуждает нас предпринять соответствующий поиск и в трехмерном случае.

Сперва рассмотрим возможность представления матрицы $\hat{Q}$ вторых моментов произвольного трехмерного пучка в виде линейной комбинации матриц двух гауссовых пучков. Она основана на линейности закона эволюции (13): если в некотором сечении системы для трех матриц моментов выполняется условие
$$\hat{Q} = g\hat{Q}_g + h\hat{Q}_h \ , \qquad (30)$$
где g и h - скаляры, то оно будет выполняться и в любом ином сечении. Без потери общности можно считать, что матрица $\hat{Q}$ в (30) имеет канонический вид (25). Тогда матрицы двух других пучков также можно взять в диагональном виде
$$\hat{Q}_g = diag\left[\xi_x, \xi_y, \xi_x^{-1}, \xi_y^{-1}\right];\ \hat{Q}_h = diag\left[\eta_x, \eta_y, \eta_x^{-1}, \eta_y^{-1}\right], \qquad (31)$$
который соответствует астигматическим гауссовым пучкам и может быть получен из канонической матрицы гауссова пучка (являющейся единичной) преобразованием (12) с матрицами $\hat{H}$ типа (24). Тогда соотношение (30), которое может рассматриваться как матричное уравнение для нахождения ξ и η по заданным g и h, распадается на две системы скалярных уравнений с решениями
$$\xi_{x,y} = \left(g^2 - h^2 + \Lambda_{x,y}^2 \pm W_{x,y}\right)\Big/\left(2g\Lambda_{x,y}\right) ,$$
$$\eta_{x,y} = \left(h^2 - g^2 + \Lambda_{x,y}^2 \mp W_{x,y}\right)\Big/\left(2h\Lambda_{x,y}\right) , \qquad (32)$$
где $W_{x,y} = \sqrt{\left(g^2 + h^2 - \Lambda_{x,y}^2\right)^2 - 4g^2h^2}$.

Как видно, существует неограниченное число способов разложения $\hat{Q}$ на гауссоподобные составляющие: каждой паре коэффициентов (g, h) могут соответствовать, вообще говоря, четыре различных комбинации пучков. При этом допустимые наборы (g, h) и форма составляющих зависят от инвариантов исходной матрицы и преследуемой нами цели. Так, если мы хотим, чтобы найденные матрицы $\hat{Q}_g$ и $\hat{Q}_h$ обладали обычными свойствами матриц моментов, следует потребовать $\xi > 0$, $\eta > 0$, что приводит к условиям

$$0 < g + h \le \Lambda_x \quad \text{, если } gh > 0 \text{ ;}$$
$$g + h \ge \Lambda_y \quad \text{, если } gh < 0 \qquad (33)$$

(напомним, что мы условились считать $\Lambda_x \le \Lambda_y$).

Рассмотрим еще возможность физической реализации разложения (30). Для ее осуществления пучки с матрицами моментов $\hat{Q}_g$ и $\hat{Q}_h$ должны быть взаимно некогерентны: функции когерентности, а с ними и матрицы моментов, складываются лишь при этом условии. Исходя из принятой нами нормировки (4), нетрудно показать, что в этом случае g и h приобретают смысл приходящихся на складываемые пучки долей общей мощности, удовлетворяя естественным условиям g, h > 0, g + h= = 1, согласующимся с первым из условий (33).

Поскольку в остальном g и h могут быть произвольными, то можно взять, например, g << h, сделав, таким образом, относительный "вес" одного из пучков сколь угодно малым. Таким образом, оказывается, что пучок с любой заданной матрицей моментов может быть моделирован путем сложения всего лишь двух гауссовых пучков, из которых один имеет произвольно малую мощность. Это обстоятельство на первый взгляд кажется весьма странным, однако с формальной точки зрения легко объяснимо: заметный вклад "слабого" пучка в результирующую матрицу моментов обусловлен значительной (и, как вытекает из (31), (32), быстро растущей с уменьшением "веса") шириной его пространственного или углового распределения. Очевидно, здесь выявилось слабое место теории моментов, к которому мы еще вернемся в заключительном разделе.

Другой вариант моделирования матрицы моментов состоит в замене исходного пучка пучком с более простой структурой, иначе расположенным относительно оси системы. Очевидно, в этом случае матрица моментов моделируемого пучка должна быть представлена в виде (7), где под $\hat{Q}_c$ и $\hat{R}_0$ будут подразумеваться матрица моментов и вектор положения оси пучка с более простой структурой.

Как и в предыдущем варианте моделирования, можно считать, что матрица $\hat{Q}$ приведена к каноническому виду (25). Тогда при $\tilde{\tilde{R}}_0 = (2k)^{-1/2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\Lambda_y - \Lambda_x^2 / \Lambda_y} \end{vmatrix}$ матрица $\hat{Q}_c = \hat{Q} - 2k\vec{R}_0 \tilde{\tilde{R}}_0$ равна $diag\left[\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_x, \Lambda_x^2 / \Lambda_y\right]$ и является матрицей астигматического гауссоподобного пучка, ибо после его пропускания через оптическую систему, имеющую $\hat{H}$ вида (24) с a = 1 и $b = \sqrt{\Lambda_x / \Lambda_y}$, становится скалярной.

Очевидно, этот результат в наибольшей степени сохраняет дух концепции "встроенного" гауссова пучка [8 - 10]: он означает, что с точки зрения вторых моментов любой трехмерный пучок ведет себя подобно некоему гауссову, являющемуся в общем случае внеосевым. К такому выводу можно было бы придти и с помощью методов раздела 5, если бы мы там рассмотрели каноническое представление матрицы нецентральных моментов гауссовых пучков. Заметим также, что каждой матрице моментов можно сопоставить некоторый пучок, созданный анизотропным гауссовым источником Шелла [5, 22]; это дает еще один способ моделирования матриц моментов.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученные в предыдущих разделах результаты создают полноценную базу для применения метода вторых моментов в его наиболее общем виде. В частности, они позволяют рассчитывать конкретные оптические системы, осуществляющие заданные преобразования матрицы моментов. Очевидно, при гауссоподобии преобразуемых пучков структура таких систем будет отличаться от классической [1, 2] разве что астигматизмом элементов, при негауссоподобии же может деформироваться даже идеология построения систем. Действительно, мы видели, что в отсутствие гауссоподобия даже самая, казалось бы, стандартная коллимация пучка при требовании минимизации произведения величин $\det\hat{Q}_{11}$ и $\det\hat{Q}_{22}$, которые характеризуют ширины пространственного и углового распределений, не может быть осуществлена традиционным образом (с помощью фазового корректора). Могут возникнуть и новые задачи; все это создает реальную перспективу применения развитых подходов, в частности, с использованием внеосевых "встроенных" гауссовых пучков.

С другой стороны, одно из основных положений теории моментов - понятие о "факторах качества" - во многих ситуациях теряет смысл. Более того, не только исследованные ранее отдельные вторые моменты, но и полная их матрица никак не могут быть достаточными для адекватного отображения характеристик реальных пучков.

Начнем с того, что действующее определение моментов (5), (6) неприменимо к пучкам, интенсивность которых спадает при $|\vec{r}| \to \infty$ как $|\vec{r}|^{-3}$ или медленнее (соответствующие интегралы расходятся). Еще хуже то, что аналогичная ситуация имеет место и в отношении зависимости силы света в заданном направлении от $|\vec{p}|$; отсюда вытекает, в частности, что все реальные пучки, "хвосты" распределений интенсивности которых оказываются обрезанными какой-либо "жесткой" диафрагмой, попадают в класс пучков, обладающих неограниченно большими $\hat{Q}_{22}$ и, следовательно, беспредельно плохим "качеством"!

В результате при сравнении пучков с позиций теории моментов из-за явно завышенной роли "хвостов" распределений нередко оказывается, что более высоким "качеством" обладают пучки явно менее полезные на практике. Так, эрмитовы пучки высокого порядка обладают хотя и большими, но все же конечными M^2, в то время как неизмеримо более благоприятный с точки зрения угловой расходимости излучения пучок, являющийся результатом дифракции идеальной плоской волны на отверстии, относится к тому самому злополучному классу с $\hat{Q}_{22} = \infty$. Показательно и то, что даже в нашем весьма отвлеченном рассмотрении пришлось столкнуться с более чем странным случаем, когда добавление к одному гауссову пучку второго с ничтожной мощностью приводит к разительному ухудшению "качества" (смотри предыдущий раздел).

Все это приводит к тому, что полностью доверять выполненным с помощью теории моментов оценкам "качества" можно лишь тогда, когда это "качество" оказывается самым высоким ($\det\hat{Q} \approx 1$). Более полезными представляются использовавшиеся в [2] критерии, основанные на величине осевой силы света; однако и их ценность не стоит преувеличивать - как отмечалось в [2], попытки характеризовать "качество" световых пучков во всех случаях каким-то одним и тем же параметром к успеху привести не могут.

Но даже сознавая ограниченную пригодность метода моментов для практических оценок, следует подчеркнуть его ценность в теоретическом плане. Обнадеживающей выглядит, например, основанная на п.4 Приложения Б трактовка $\left(\det \hat{Q}_c\right)^{1/2}$ как относительной величины объема фазового $(\vec{r}, \vec{p})$ -пространства, занимаемого пучком, и, соответственно, как "информационной емкости" пучка, связанной с числом пространственных степеней свободы [23].

В заключение заметим, что рассматривавшаяся нами задача о преобразованиях вторых моментов с точки зрения ее математической стороны весьма близка к задаче о распространении частично-когерентных полей, описываемых анизотропными гауссовыми моделями Шелла [22]. Результаты настоящей статьи, касающиеся классификации пучков и инвариантов их преобразований, в принципе можно было бы извлечь из указанной работы. Однако из-за высокой степени абстрактности использованного авторами [22] математического аппарата, основанного на теории групп Ли, выволы [22] оказались труднодоступными. Использованный нами подход, позволяя решить практически одновременно обе задачи, является более простым и наглядным, некоторые же из полученных независимо результатов (в первую очередь это касается раздела 5) могут служить полезной иллюстрацией использованных в [22] групповых и геометрических понятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ниже приведены формулы для определения моментов когерентного пучка через комплексные амплитуды $u(\vec{r})$ и $U(\vec{p})$. Использованы обозначения:

$\vec{\nabla} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{matrix}\right|$, $\vec{\nabla}_p = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial p_x} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_y} \end{matrix}\right|$. Итак,

$$\vec{R}_0 = \int u^*(\vec{r}) \left|\begin{matrix} \vec{r} \\ -\dfrac{i}{k}\vec{\nabla} \end{matrix}\right| u(\vec{r})(dr) = \int U^*(\vec{p}) \left|\begin{matrix} \dfrac{i}{k}\vec{\nabla}_p \\ \vec{p} \end{matrix}\right| U(\vec{p})(dp) \;;$$

$$\hat{Q}_{11} = 2k\int \vec{r}\tilde{\vec{r}}\left|u(\vec{r})\right|^2 (dr) = (2/k)\int \vec{\nabla}_p U^*(\vec{p})\tilde{\vec{\nabla}}_p U(\vec{p})(dp) \;;$$

$$\hat{Q}_{12} = \tilde{\hat{Q}}_{21} = i\int \vec{r}\left[u(\vec{r})\tilde{\vec{\nabla}}u^*(\vec{r}) - u^*(\vec{r})\tilde{\vec{\nabla}}u(\vec{r})\right](dr) =$$

$$= i\int\left[U^*(\vec{p})\vec{\nabla}_p U(\vec{p}) - U(\vec{p})\vec{\nabla}_p U^*(\vec{p})\right]\tilde{\vec{p}}(dp) \;;$$

$$\hat{Q}_{22} = 2k\int \vec{p}\tilde{\vec{p}}\left|U(\vec{p})\right|^2 (dp) = (2/k)\int \vec{\nabla}u^*(\vec{r})\;\tilde{\vec{\nabla}}u(\vec{r})(dr) \;.$$

Обращает на себя внимание сходство этих формул с выражениями для средних значений симметризованных произведений операторов координат и импульсов [24], что является следствием глубокой и продуктивной аналогии волновой оптики и квантовой механики [14].

Если используется представление комплексной амплитуды в виде $u(\vec{r}) = F(\vec{r}) \; \exp\left[i\varphi(\vec{r})\right]$, где $F(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$ вещественны, то

$$\hat{Q}_{11} = 2k\int \vec{r}\tilde{\vec{r}}\; F^2(\vec{r})(dr) \;,\; \hat{Q}_{12} = 2\int\left[\vec{r}\tilde{\vec{\nabla}}\varphi(\vec{r})\right] F^2(\vec{r})(dr) \;,$$

$$\hat{Q}_{22} = (2/k)\int\left[\vec{\nabla}F(\vec{r})\tilde{\vec{\nabla}}F(\vec{r}) + F^2(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\tilde{\vec{\nabla}}\varphi(\vec{r})\right](dr) \;.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Покажем, что при любом ненулевом векторе $\vec{R}_a = \begin{vmatrix} \vec{r}_a \\ \vec{p}_a \end{vmatrix}$ выполняется неравенство $V \equiv \left(\vec{R}_a, \hat{Q}\vec{R}_a\right) = \int \tilde{\vec{R}}_a \vec{R}\tilde{\vec{R}}\vec{R}_a I\left(\vec{R}\right)\left(dR\right) = \int \left(\vec{R}_a, \vec{R}\right)^2 I\left(\vec{R}\right)\left(dR\right) > 0$.

В геометрическом приближении $I\left(\vec{R}\right) \geq 0$, и это неравенство является очевидным. В дифракционном приближении имеем

$$V = \iiint \left[\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right) + \left(\vec{p}_a, \vec{p}\right)\right]^2 u\left(\vec{r} + \vec{r}\,'/2\right)\; u^*\left(\vec{r} - \vec{r}\,'/2\right)\; \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\,'\right)\right]\; (dr')(dr)\left(dp\right) .$$

Известно, что для любой функции f(r), удовлетворяющей условиям Дирихле, справедливо равенство

$\iint \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\,'\right) - \left(\vec{p}, \vec{r}\,''\right)\right] f\left(\vec{r}\,'\right)(dr')\left(dp\right) = \left(2\pi/k\right)^2 f\left(\vec{r}\,''\right)$ [25]. Из него следует $\iint \left[\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right) + \left(\vec{p}_a, \vec{p}\right)\right]^2 f\left(\vec{r}\,'\right)\; \exp\left[-ik\left(\vec{p}, \vec{r}\,'\right)\right]\; (dr')\left(dp\right) =$

$$= \left(2\pi/k\right)^2 \left[\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right)^2 f\left(\vec{r}\,''\right) - 2\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right)\frac{i}{k}\tilde{\vec{p}}_a \vec{\nabla} f\left(\vec{r}\,''\right) - \frac{1}{k^2}\left(\tilde{\vec{p}}_a \nabla\right)^2 f\left(\vec{r}\,''\right)\right]_{\vec{r}\,''=0} .$$

Подставив сюда $f\left(\vec{r}\,'\right) = u\left(\vec{r} + \vec{r}\,'/2\right)\; u^*\left(\vec{r} - \vec{r}\,'/2\right)$, получаем

$$V = \left(2\pi/k\right)^2 \int \left\{\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right)^2 \left|u\left(\vec{r}\right)\right|^2 - \left(\vec{r}_a, \vec{r}\right)\frac{i}{k}\tilde{\vec{p}}_a\left[u\left(\vec{r}\right)\; \vec{\nabla} u^*\left(\vec{r}\right) - u^*\left(\vec{r}\right)\; \vec{\nabla} u\left(\vec{r}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left[u^*\left(\vec{r}\right)\left(\tilde{\vec{p}}_a \vec{\nabla}\right)^2 u\left(\vec{r}\right) + u\left(\vec{r}\right)\left(\tilde{\vec{p}}_a \vec{\nabla}\right)^2 u^*\left(\vec{r}\right) - 2\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u\left(\vec{r}\right)\right)\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u^*\left(\vec{r}\right)\right)\right]\right\}\left(dr\right) =$$

$$= \left(2\pi/k\right)^2 \int \left[\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right) u\left(\vec{r}\right) + \frac{i}{k}\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u\left(\vec{r}\right)\right)\right]\left[\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right) u^*\left(\vec{r}\right) - \frac{i}{k}\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u^*\left(\vec{r}\right)\right)\right]\; (dr) =$$

$$= \left(2\pi/k\right) \int \left|\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right) u\left(\vec{r}\right) + \frac{i}{k}\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u\left(\vec{r}\right)\right)\right|^2 (dr) \geq 0$$

(здесь многократно использовалась формула $\int \varphi_1\left(\vec{r}\right)\; \nabla \varphi_2\left(\vec{r}\right)\left(dr\right) = -\int \varphi_2\left(\vec{r}\right)\; \nabla \varphi_1\left(\vec{r}\right)\left(dr\right)$, справедливая в том случае, если при $|\vec{r}| \to \infty$ функции φ_1 и φ_2 убывают достаточно быстро).

Равенство здесь достигается только в том случае, если $\left(\vec{r}_a, \vec{r}\right)\; u\left(\vec{r}\right) = -\frac{i}{k}\left(\vec{p}_a, \vec{\nabla} u\left(\vec{r}\right)\right)$. Это возможно лишь если $u\left(\vec{r}\right)$ имеет соответствующий Гауссовому пучку вид $u\left(\vec{r}\right) \propto \exp\left[\left(ik/2\right)\left(\vec{r}, \hat{d}\cdot\vec{r}\right)\right]$, причем $\vec{r}_a = \hat{d}\cdot\vec{p}_a$. Поскольку векторы $\vec{r}_a$ и $\vec{p}_a$ вещественны, матрица $\hat{d}$ должна быть также вещественной, что соответствует бесконечной ширине пучка и потому невозможно.

Таким образом, V>0 , и свойство положительной определенности матрицы $\hat{Q}$ доказано.

Теперь перечислим некоторые свойства знакоопределенных матриц [19]. Следуя [26], будем использовать такие обозначения: свойство положительной определенности матрицы $\hat{X}$, означающее, что для произвольного ненулевого вектора $\vec{S}$ (той же размерности) имеет место $\left(\vec{S}, \hat{X}\vec{S}\right) > 0$, записывается в виде $\hat{X} > 0$.

Если $\left(\vec{S}, \hat{X}\vec{S}\right) \geq 0$, то матрица обладает свойством положительной полуопределенности, обозначаемым $\hat{X} \geq 0$; в этом случае во всех последующих формулах знаки > заменяются на ≥ .Наконец, если $\hat{X} > 0$

и $\hat{Y} > 0$, то $\hat{X} > \hat{Y}$ равносильно $\hat{X} - \hat{Y} > 0$. Итак,

1. Если $\hat{X} > 0$, то $\hat{X}^{-1} > 0$, $\det \hat{X} > 0$, $Sp\ \hat{X} > 0$ и все собственные значения $\lambda_j\left(\hat{X}\right) > 0$.

2. Если $\hat{X} > 0$ и $\hat{\Psi}$ - невырожденная матрица, то $\hat{\Psi}\hat{X}\tilde{\hat{\Psi}} > 0$.

3. Если $\hat{X} > \hat{Y}$, то $\hat{Y}^{-1} > \hat{X}^{-1}$, $\det \hat{X} > \det \hat{Y}$, $Sp\ \hat{X} > Sp\ \hat{Y}$, и если собственные значения $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ одинаково упорядочены, то $\lambda_j\left(\hat{X}\right) > \lambda_j\left(\hat{Y}\right)$.

4. Наглядное представление о свойствах тензора, выражаемого положительно-определенной матрицей $\hat{X}$, дают эллипсоиды $\left(\vec{S}, \hat{X}\vec{S}\right) = 1$ и $\left(\hat{S}, \hat{X}^{-1}\vec{S}\right) = 1$ [18]. Главные оси эллипсоидов образуют систему координат, в которой $\hat{X}$ диагональна, а величины полуосей равны $\lambda_j^{-1}\left(\hat{X}\right)$ в первом и $\lambda_j\left(\hat{X}\right)$ во втором случае. Длина радиус-вектора произвольной точки первого эллипсоида обратна величине тензорного свойства (в нашем случае это среднеквадратичная ширина распределения, моменты которого образуют тензор) в направлении этого радиус-вектора; длина радиус-вектора $\vec{n}$ точки второго эллипсоида равна величине свойства в направлении вектора $\hat{X}\vec{n}$.Общей характеристикой тензорной величины служит объем второго эллипсоида, пропорциональный $\det\ \hat{X}$, или среднее значение его полуосей, пропорциональное $Sp\ \hat{X}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В общем случае разъюстированных астигматических оптических систем (10) заменяется аналогичным соотношением с 5х5-матрицей (см.[2]), которое может быть записано в "блочной" форме

$$\begin{vmatrix} \vec{r}\,' \\ \vec{p}\,' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \vec{a} \\ \hat{C} & \hat{D} & \vec{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \\ 1 \end{vmatrix} \equiv \hat{G} \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \\ 1 \end{vmatrix} , \qquad (\text{П}1)$$

где $\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{vmatrix} c_x \\ c_y \end{vmatrix}$ - вектора, описывающие эффект разъюстировки, остальные обозначения прежние.

Введем симметричную матрицу

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{\vec{r}} & \tilde{\vec{p}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^2 & xy & xp_x & xp_y & x \\ xy & y^2 & yp_x & yp_y & y \\ xp_x & yp_x & p_x^2 & p_x p_y & p_x \\ xp_y & yp_y & p_x p_y & p_y^2 & p_y \\ x & y & p_x & p_y & 1 \end{Vmatrix} .$$

Усреднение ее членов по пространственно-угловому распределению $I\left(\vec{r}, \vec{p}\right)$ дает полный набор первых и вторых моментов:

$$\Theta = \iint \hat{\mu} I\left(\vec{r}, \vec{p}\right)\left(dr\right)\left(dp\right) = \begin{Vmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \vec{r}_0 \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \vec{p}_0 \\ \tilde{\vec{r}}_0 & \tilde{\vec{p}}_0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

После транспозиции (П1) приобретает вид $\begin{vmatrix} \tilde{\vec{r}}\,' & \tilde{\vec{p}}\,' & 1 \end{vmatrix} =$

$= \left| \tilde{\tilde{r}} \quad \tilde{\tilde{p}} \quad 1 \right| \cdot \tilde{\tilde{\hat{G}}}$, откуда следует $\hat{\mu}' = \hat{G} \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \left| \tilde{\tilde{r}} \quad \tilde{\tilde{p}} \quad 1 \right| \tilde{\tilde{\hat{G}}} = \hat{G}\hat{\mu}\tilde{\tilde{\hat{G}}}$.

Выполнив далее те же преобразования, что и в разделе 3, получаем искомую формулу $\hat{\Theta}' = \hat{G}\hat{\Theta}\tilde{\tilde{\hat{G}}}$. Из нее следует, в частности, соотношение для первых моментов $\begin{vmatrix} \vec{r}_0' \\ \vec{p}_0' \\ 1 \end{vmatrix} = \hat{G} \begin{vmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Оно показывает, что полученный ранее [9, 10] для более простых оптических систем вывод о том, что в отсутствие амплитудных корректоров "центр тяжести" пучка следует вдоль луча, повинующегося законам геометрической оптики, остается справедливым и для намного более сложных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику (пер. с англ.). М.: Мир, 1978
2. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990
3. Wolf E. // Opt. Soc. Amer. 1978, v. 68, No 1, p. 6
4. Li Y., Wolf E. // Opt. Lett. 1982, v. 7, p. 256
5. Simon R. // J. Opt. 1985, v. 14, No 3, p. 92
6. Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И. // Изв. ВУЗ-ов, Радиофизика, 1971, т.14, с. 1353
7. Siegman A.E. // IEEE J. Quant. Electr., 1991, v. QE-27, p. 1146
8. Belanger P.A. // Opt. Lett., 1991, v. 17, p. 196
9. Siegman A.E. // Draft version of 7/2/1991
10. Siegman A.E. // version of 11/18/1990
11. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр., 1986, т. 61, в. 5, с. 1123
12. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр., 1989, т. 66, в. 4, с. 910 ; в. 3, с. 702
13. Siegman A.E. // Proc. SPIE, 1990, v. 1124, p. 2
14. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974
15. Bastiaans M.J. // Opt. Four Dim. Conf., Engenada, 1981 // N.Y., 1981, p.292
16. Bastiaans M.J. // J. Opt. Soc. Amer., 1979, v. 69, p. 1710
17. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М., 1971
18. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., 1960
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Введение в матричный анализ. М., 1989
20. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989
21. Sudarshan E.C.G., Mukunda N., Simon R. // Opt. Acta, 1985, v. 32, No 8, p.855
22. Simon R., Sudarshan E.C.G., Mukunda N. // Phys.Rev., 1985, v. A31, No 4, p. 2419
23. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М., 1971
24. Елютин П.В. Кривченков В.Д. Квантовая механика. М., 1976
25. Korn G.A., Korn T.M., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. - Mc.Growe-Hill Book Company, 1961
26. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., 1984