

ИЗМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ ИХ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Ю.А.Ананьев, А.Я.Бекшаев

Рассмотрены законы прохождения монохроматического излучения через оптические элементы со спектрально-угловой дисперсией - призмы, дифракционные решетки. Основное внимание уделено недавно обнаруженному эффекту нарушения симметрии преобразования при дифракции пучка на апертуре подобных элементов.

1. Постановка задачи

В различных оптических устройствах широко применяются элементы со спектрально-угловой дисперсией - дифракционные решетки, призмы; их поверхности чаще всего являются плоскими. В тех редких случаях, когда поверхность решетки либо одна из поверхностей призмы имеет сферическую либо эллипсоидальную форму, такой элемент может быть представлен в виде сочетания элемента с плоской поверхностью и соответствующей тонкой линзы. Это дает нам право отвлечься от формы поверхности и рассматривать исключительно плоские решетки и поверхности раздела - плоские дисперсионные элементы (ПДЭ).

Известны различные способы описания прохождения света через ПДЭ (см., например, [1 - 4]; среди них выделяется простотой и универсальностью матричный метод [5, 6], в котором ПДЭ рассматриваются как локальные (лишенные длины) элементы оптической схемы. При таком подходе преобразование светового пучка любым ПДЭ оказывается проективным и может быть описано посредством действительной блочно-диагональной матрицы передачи

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \quad (1) \text{ (волнистая линия}$$

означает транспонирование). Благодаря этому расчет сколь угодно сложной оптической системы, содержащей любое число ПДЭ и квадратичных фазово-амплитудных корректоров, может быть выполнен по стандартным правилам [7, 8].

Нетрудно видеть, что данное приближение основано на пренебрежении дифракционной перестройкой пучка в зоне ПДЭ и что учет этой перестройки здесь вообще невозможен. Действительно, представить процесс прохождения через ПДЭ как проективное преобразование в сочетании с прохождением имеющего определенную длину участка однородной среды (наподобие того, как прохождение толстой линзы сводится к прохождению двух тонких линз и участка среды между ними) здесь не удастся.

Причины этого поясняет рис. 1. Особенно наглядна ситуация в изображенном на рис. 1, а случае автоколлимационного отражения от дифракционной решетки. Отсчетные плоскости 1 и 2 для падающего и отраженного пучков, как обычно, перпендикулярны направлению распространения. Видно, что верхний луч проходит между этими плоскостями расстояние $2AA'$, в то время как соответствующая дистанция для нижнего луча равна нулю.

Аналогичный эффект имеет место и на границах раздела. На рис. 1, б верхний луч проходит между отсчетными плоскостями расстояние AA' , нижний - меньшее расстояние BB' и вдобавок по оптически более плотной среде (напомним, что дифракционная перестройка в слое среды толщины L с показателем преломления n аналогична перестройке в слое пустого пространства толщины L/n).

Поэтому если дифракционная перестройка на таких расстояниях оказывается по тем или иным причинам существенной, стандартные матричные методы перестают быть удовлетворительными. Примером может послужить случай дисперсионного резонатора, составленного из дифракционной решетки и изображенного на рис. 1, а пунктирной линией плоского зеркала - здесь проходимое верхним лучом дополнительное расстояние сопоставимо с полной длиной устройства. Именно исследования в области лазеров с дисперсионными резонаторами привели С.П.Анохова [9] к выявлению обсуждаемого эффекта, который уже десятки лет оставался незамеченным; Анохов и указал нам на необходимость уточнения теории прохождения света через ПДЭ.

2. Расчетная модель и система обозначений.

В качестве достаточно общей расчетной модели рассмотрим прохождение света через плоскую границу между однородными средами 1 и 2 с показателями преломления n_1 и n_2 , на которую нанесена дифракционная решетка (могущая быть двумерной). Геометрическую картину преобразования пучков и соответствующие системы координат примем теми же, что и в [5, 6]; они изображены на рис. 2. Одна декартова система - (X, Y, Z) - связана с границей, две другие - (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) - со входным 1 (падающим) и выходным 2

(преобразованным) квазимонохроматическими пучками. Начало отсчета у всех трех систем общее и находится в точке падения O . Через эту точку проходят и опорные плоскости (ОП); на них, как и в [5], должны задаваться параметры пучков, к которым относятся искомые правила преобразования. Входная плоскость ОП1 совпадает с координатной плоскостью $z_1 = 0$, выходная ОП2 - с плоскостью $z_2 = 0$.

Материалы настоящей работы относятся к типичной ситуации, когда оба пучка параксиальны; тогда оси z_1 и z_2 суть номинальные направления пучков (направления "несущих" плоских волн, вблизи которых сосредоточены угловые спектры пучков). Ось Z перпендикулярна границе, ось x_1 лежит в плоскости падения, ось x_2 - в плоскости преломления, проходящей через оси Z и z_2 .

Координаты произвольной точки в различных системах связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{vmatrix} = \mathbf{T}(\theta_j, \varphi_j) \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2), \quad (2) \text{ где}$$

$$\mathbf{T}(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\varphi & -\cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta \cos\varphi & -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}. \text{ Отсюда следует, что лежащие на границе точки}$$

с координатами $\mathbf{R} = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$ имеют в других системах отсчета координаты

$$\mathbf{r}_j(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}_j \mathbf{R}, \quad z_j(\mathbf{R}) = \cos\theta_j \cdot (\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{R}), \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_j = \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \end{vmatrix}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ - скалярное произведение,

$$\mathbf{Q}_j = \begin{vmatrix} \cos\theta_j \cos\varphi_j & -\cos\theta_j \sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{vmatrix}, \quad \mathbf{q}_j = \text{tg}\theta_j \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi_j \\ -\sin\varphi_j \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Волновое поле j -го пучка будем задавать в виде пространственного распределения поперечной компоненты электрического поля в комплексном представлении $E_j(\mathbf{r}_j, z_j) = u_j(\mathbf{r}_j, z_j) \exp(ikn_j z_j)$, где $u_j(\mathbf{r}_j, z_j)$ - медленно меняющаяся на расстояниях порядка длины волны комплексная амплитуда, k - волновое число излучения в вакууме.

При данном выше определении опорных плоскостей (для входного пучка - $z_1 = 0$, выходного - $z_2 = 0$) мы будем иметь дело с фиктивными распределениями поля на этих плоскостях $E_1(\mathbf{r}_1, 0) = u_1(\mathbf{r}_1, 0) \equiv u_1(\mathbf{r}_1)$ и $E_2(\mathbf{r}_2, 0) = u_2(\mathbf{r}_2, 0) \equiv u_2(\mathbf{r}_2)$, совпадающими с истинными лишь на части сечения. Первое из этих распределений является тем, которое

имел бы падающий пучок, следуя вплоть до входной плоскости по среде с показателем преломления n_1 ; второе - распределение, которое должен был бы иметь преобразованный пучок на выходной плоскости, чтобы, следуя от нее по среде с показателем преломления n_2 , иметь везде после границы раздела ту же структуру, что и реальный пучок. Можно было бы, конечно, следуя рис. 1,б, раздвинуть входную и выходную плоскости, перенести начало отсчета O в сторону от оптической оси, и иметь дело не с полуфиктивными, а с истинными распределениями полей. Однако выкладки в рамках развитого нами матричного аппарата [5, 10] во многом основаны на "привязке" систем координат к оптической оси, и эту "привязку" удобно сохранить.

Итак, нашей задачей будет являться нахождение $u_2(\mathbf{r}_2)$ по заданному $u_1(\mathbf{r}_1)$. Если в нулевом приближении [5] связь этих двух функций устанавливалась чисто геометрически на основе соотношений (2) - (4), то теперь она будет рассмотрена более корректно с учетом дифракционных поправок.

3. ПДЭ как линейная оптическая система

Естественный путь анализа опирается на тот очевидный факт, что любую падающую на ПДЭ плоскую волну он преобразует в плоскую же, которая может отличаться от исходной лишь комплексной амплитудой и направлением распространения. Поэтому перейдем к представлению пучков через угловые спектры плоских волн [11]

$$E_j(\mathbf{r}_j, z_j) = \frac{k}{2\pi} \int U_j(\mathbf{p}_j) v_j(\mathbf{r}_j, z_j, \mathbf{p}_j) (d\mathbf{p}_j), \quad (5) \text{ где}$$

$(d\mathbf{p}_j) = dp_{jx} dp_{jy}$, вектор $\mathbf{p}_j = \begin{vmatrix} p_{jx} \\ p_{jy} \end{vmatrix}$ характеризует направление нормированной

плосковолновой составляющей с распределением поля

$$v_j(\mathbf{r}_j, z_j, \mathbf{p}_j) = \exp \left\{ ik \left[(\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_j) + z_j \sqrt{n_j^2 - \mathbf{p}_j^2} \right] \right\} \quad (6) \text{ в системе}$$

координат j -го пучка ($\mathbf{a}^2 \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$), а $U_j(\mathbf{p}_j)$ есть соответствующая спектральная плотность. Полагая в (5) и (6) $z_j = 0$, легко заметить, что $U_j(\mathbf{p}_j)$ является фурье-трансформантой комплексной амплитуды $u_j(\mathbf{r}_j)$.

Согласно сказанному выше, каждой компоненте пучка 1 вида (6) ПДЭ ставит в соответствие генетически связанную с ним компоненту пучка 2:

$$v_1(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{p}_1) \rightarrow \sigma(\mathbf{p}_1) v_2(\mathbf{r}_2, z_2, \mathbf{p}_2), \quad (7) \text{ причем как}$$

множитель $\sigma(\mathbf{p}_1)$ (в общем случае комплексный), так и функциональная зависимость \mathbf{p}_2 от \mathbf{p}_1

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1) \quad (8) \text{ для любой конкретной}$$

структуры ПДЭ могут быть рассчитаны или найдены экспериментально. Зная же закономерности, касающиеся отдельных плоских волн, благодаря линейности осуществляемого ПДЭ преобразования можно установить законы и для их любых суперпозиций типа (5). Отметим, что подобные идеи неоднократно использовались при анализе поведения параксиальных пучков в присутствии плоских границ раздела (см., например, [11 - 15]).

Таким образом, ПДЭ является, в сущности, линейным амплитудным фильтром. Это позволит нам в дальнейшем опираться на мощный и универсальный аппарат теории оптических систем [16 - 18]. Из (7), (8) вытекает, что пространственно-частотная функция отклика для нашего фильтра $K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, определяющая связь между входным и выходным угловыми спектрами в соответствии с формулой

$$U_2(\mathbf{p}_2) = \int K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) U_1(\mathbf{p}_1) (d\mathbf{p}_1), \quad (9) \text{ имеет вид}$$

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sigma(\mathbf{p}_1) \cdot \delta[\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1)] \quad (10) \quad (\delta -$$

импульсная функция Дирака). Отсюда без труда находим явный вид преобразования угловых спектров

$$U_2(\mathbf{p}_2) = U_1[\mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2)] \cdot \sigma[\mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2)] \cdot \left| \frac{d\mathbf{p}_1}{d\mathbf{p}_2} \right|, \quad (11) \text{ где } \mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2) -$$

функция, обратная (8), $\left| \frac{d\mathbf{p}_1}{d\mathbf{p}_2} \right|$ - ее якобиан. Последний, как показано в Приложении,

определяется только геометрической картиной преобразования и, согласно (ПЗ), а также рисунку 2 и правилу преобразования координат (2), равен

$$\left| \frac{d\mathbf{p}_1}{d\mathbf{p}_2} \right| = \frac{n_1}{n_2} \left| \frac{\sqrt{n_2^2 - \mathbf{p}_2^2} \cos \theta_2 - p_{2x} \sin \theta_2}{\sqrt{n_1^2 - \mathbf{p}_1^2} \cos \theta_1 - p_{1x} \sin \theta_1} \right|. \quad (12)$$

Связь комплексных амплитуд входного и выходного пучков выражается аналогично (9):

$$u_2(\mathbf{r}_2) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u_1(\mathbf{r}_1) (d\mathbf{r}_1), \quad (13) \text{ где}$$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \exp\{ik[(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1)]\} (d\mathbf{p}_1)(d\mathbf{p}_2) \quad - \quad \text{пространственная}$$

функция отклика (функция Грина) [5], $(d\mathbf{r}_j) = dx_j dy_j$. Для рассматриваемой модели

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int \sigma(\mathbf{p}_1) \exp\{ik[(\mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1)]\} (d\mathbf{p}_1). \quad (14)$$

Нетрудно также записать выражения для "гибридных" функций отклика, связывающих пространственное распределение поля в ОП1 с угловым распределением в ОП2 и наоборот [16, 17]. Любая из этих функций наравне с (10) и (14) позволяет полностью описать преобразования любых характеристик пучка в ПДЭ, но мы будем иметь дело, как правило, с функцией Грина ввиду ее непосредственной связи с более наглядными пространственными представлениями.

Кстати отметим, что если воспользоваться простейшим видом зависимостей \mathbf{p}_2 и σ от \mathbf{p}_1 , а именно $\mathbf{p}_2 = \mathbf{D}\mathbf{p}_1$ и $\sigma(\mathbf{p}_1) = \text{const}$ (здесь \mathbf{D} является тем же самым, что в (1)), то мы из (14) получаем $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \delta(\mathbf{r}_1 - \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2)$, то есть приходим к тем же законам проективного преобразования, что и в [5, 6]. Отсюда видно, что искомые дифракционные поправки связаны с учетом более корректных зависимостей σ и \mathbf{p}_2 от \mathbf{p}_1 , которые можно получить, исследуя закономерности преобразования плоских волн в ПДЭ на основе конкретных сведений о его структуре.

4. Модель дифракционной решетки

В рамках приближения Кирхгофа можно представить произвольную решетку в виде тонкого транспаранта с периодической функцией пропускания [19]. В нашем случае это означает, что амплитуда $E(\mathbf{R}, Z)$ любой волны, падающей на плоскость $Z = 0$, после взаимодействия с решеткой приобретает вид $t(\mathbf{R}) \cdot E(\mathbf{R}, 0)$, причем

$$t(\mathbf{R}) = \sum_{l,m} t_{lm}(\mathbf{R}) = \sum_{l,m} \tau_{lm} \exp[i(\mathbf{b}_{lm} \cdot \mathbf{R})], \quad (15) \text{ где}$$

$\mathbf{b}_{lm} = l\mathbf{b}_1 + m\mathbf{b}_2$, \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 - базисные векторы обратной решетки [6]. Двойной ряд Фурье в (15) используется в случае двумерной решетки; если она одномерна, остается лишь один индекс суммирования.

В соответствии с (15) преобразованная решеткой волна является, в сущности, совокупностью волн, соответствующих отдельным членам ряда и образующих дискретные

порядки дифракции. Обычно в оптических системах с ПДЭ используется излучение лишь в каком-либо одном порядке; тогда достаточно рассматривать только один из членов ряда.

Если исходная волна является плоской, то пространственные распределения входного и выходного полей описываются левой и правой частями (7) соответственно; тогда в плоскости решетки ($Z = 0$) должно выполняться равенство

$$\sigma(\mathbf{p}_1) v_2(\mathbf{r}_2, z_2, \mathbf{p}_2) = t_{lm}(\mathbf{R}) t(\mathbf{p}_1) v_1(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{p}_1), \quad (16) \text{ где } t(\mathbf{p}_1) -$$

коэффициент, характеризующий изменение амплитуды и фазы волны $v_1(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{p}_1)$ на однородной границе раздела (в простейшем случае это соответствующий коэффициент Френеля [11]), $t_{lm}(\mathbf{R})$ - член суммы (15), отвечающий выделенному порядку, \mathbf{r}_j и z_j являются функциями \mathbf{R} , определенными соотношениями (3), (4). Используя (6) и выражение для $t_{lm}(\mathbf{R})$ из (15), можно свести (16) к паре уравнений, которые выражают искомые зависимости непосредственно:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{p}_1) &= \tau_{lm} t(\mathbf{p}_1), \\ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \cos \theta_2 \left(n_2 - \sqrt{n_2^2 - \mathbf{p}_2^2} \right) &= \tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1 \cos \theta_1 \left(n_1 - \sqrt{n_1^2 - \mathbf{p}_1^2} \right) \end{aligned} \quad (17) \text{ (при}$$

выводе использовано равенство $\mathbf{b}_{lm} = k \left(n_2 \mathbf{q}_2 \cos \theta_2 - n_1 \mathbf{q}_1 \cos \theta_1 \right)$ [6], необходимое для выполнения (16) при $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, что соответствует определению осей z_1 и z_2 как направлений "несущих" плоских волн).

В первом из этих уравнений фигурируют параметры решетки, относящиеся к совершенно определенной ее модели, поэтому оно может служить для определения $\sigma(\mathbf{p}_1)$ только если данная модель заведомо справедлива. Это имеет место, например, в случае тонкой голографической решетки с периодом, заметно превышающим длину волны, или в отсутствие решетки, когда $\sigma(\mathbf{p}_1)$ является Френелевским коэффициентом для преломленной или отраженной волн (последняя ситуация рассматривалась во многих работах, в частности в [13, 14]). В иных случаях $\sigma(\mathbf{p}_1)$ обычно должно задаваться феноменологически или рассчитываться с помощью более точной теории (см. [20])

Стоит также упомянуть о том, что использование коэффициента $\sigma(\mathbf{p}_1)$, описывающего изменение амплитуды волны в соответствии с (7), характерно в основном для чисто теоретических изысканий. На практике же предпочитают говорить об энергетической эффективности преобразования, то есть о той доле мощности падающей волны, которая проходит на выход ПДЭ. Можно показать (см. Приложение), что энергетическая эффективность преобразования (7) равна $|\tau(\mathbf{p}_1)|^2$, где

$$\tau(\mathbf{p}_1) = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \sigma(\mathbf{p}_1) \left| \frac{(dp_1)}{(dp_2)} \right|^{1/2} \quad (18) - \text{коэффициент,}$$

который можно назвать "амплитудной эффективностью".

Хотя непосредственный физический смысл имеет только $|\tau(\mathbf{p}_1)|^2$, определение (18) позволяет сохранить обычное представление энергетической величины как квадрата модуля ее амплитудного аналога и в то же время делает $\sigma(\mathbf{p}_1)$ и $\tau(\mathbf{p}_1)$ взаимозаменяемыми, вследствие чего можно свободно применять ту форму коэффициента преобразования, которая диктуется потребностями конкретной задачи. Мы будем, как правило, пользоваться коэффициентом $\tau(\mathbf{p}_1)$ ввиду его непосредственной связи с имеющимися в литературе [11, 20] или получаемыми в экспериментах данными об энергетических параметрах преобразования плоских волн в том или ином типе ПДЭ.

5. Преобразование углового спектра в ПДЭ. Предварительное рассмотрение

Обратимся теперь к анализу второго уравнения (17). Оно содержит только показатели преломления контактирующих сред и основные геометрические параметры ПДЭ, но совершенно свободно от его специальных физических особенностей (материала решетки, природы и формы штрихов и т.д.), а потому зависимость (8) определяется им исчерпывающе. Чтобы явно ее представить, достаточно разрешить это уравнение относительно \mathbf{p}_2 .

Точное аналитическое решение здесь получить невозможно. Однако можно воспользоваться тем, что в используемом нами параксиальном приближении

$$\frac{1}{n_j} |\mathbf{p}_j| < \frac{\Delta p_j}{n_j} \ll 1, \quad (19) \text{ где } \Delta p_j -$$

характерный размер углового спектра j-го пучка; учитывая это обстоятельство и пренебрегая членами второго порядка малости, находим

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{D} \mathbf{p}_1 - \frac{1}{2n_1} \mathbf{p}_1^2 \mathbf{D} \mathbf{w}_1 + \frac{1}{2n_2} (\mathbf{D} \mathbf{p}_1)^2 \mathbf{w}_2, \quad (20) \text{ где}$$

$$\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{Q}}_2^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_1 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \cos \psi & -\frac{\sin \psi}{\cos \theta_2} \\ \cos \theta_1 \sin \psi & \cos \psi \end{array} \right\| \quad (21) - \text{блок } \mathbf{H}-$$

матрицы бездифракционного приближения (1), $\psi \equiv \varphi_2 - \varphi_1$,

$$\mathbf{w}_j = \tilde{\mathbf{Q}}_j^{-1} \mathbf{q}_j \cos \theta_j = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \theta_j \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Взятый в отдельности первый член (20) соответствует тому же чисто проективному преобразованию, что и в [5, 6]; остальные слагаемые описывают поправку, обусловленную дифракционной перестройкой пучка в ПДЭ. Заметим, что условие ее малости $|\mathbf{p}_2 - \mathbf{D}\mathbf{p}_1| \ll |\mathbf{p}_2|$, одновременно являющееся условием применимости (20), из-за особенностей геометрии преобразования в ПДЭ может существенно усилить или ослабить ограничения, налагаемые неравенством (19), и потому заслуживает некоторого обсуждения.

Для анализа этого условия воспользуемся соотношением

$\mu_a \leq (\mathbf{D}\mathbf{p}_1)^2 / \mathbf{p}_1^2 = (\mathbf{p}_1 \cdot \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{D}\mathbf{p}_1) / \mathbf{p}_1^2 \leq \mu_b$ ($\mu_b \geq \mu_a > 0$ - собственные значения положительно определенной матрицы $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{D}$) [21]. Если величины μ_a и μ_b различаются немного ($\mu_a, \mu_b \approx \mu$), из него следует

$$(\Delta p_2 / \Delta p_1) \approx \mathbf{p}_2^2 / \mathbf{p}_1^2 \approx (\mathbf{D}\mathbf{p}_1)^2 / \mathbf{p}_1^2 \approx \mu, \quad (23) \text{ что}$$

позволяет записать обсуждаемое условие в виде

$$\left| \frac{\mathbf{w}_2}{n_2} \mu - \frac{\mathbf{D}\mathbf{w}_1}{n_1} \right| \Delta p_1 \equiv \varepsilon \ll 1. \quad (24)$$

При сильном астигматизме преобразования, когда μ_a и μ_b значительно разнятся, это условие в принципе должно рассматриваться для каждого собственного значения отдельно, однако на практике достаточно определить ε для более невыгодного случая.

Величина \square в сущности является малым безразмерным параметром нашей задачи. Если в проективном приближении рассматривался лишь нулевой порядок по ε , то в данной работе производится последовательный учет членов первого порядка.

Соответствующее приближение для функции Грина можно найти, если подставить (20) в (14) и аппроксимировать полученный интеграл

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \sigma(\mathbf{p}_1) \exp \left\{ ik \left[\frac{1}{2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{F}\mathbf{p}_1) + (\mathbf{p}_1 \cdot (\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) \right] \right\} (dp_1) \quad (\text{здесь}$$

$$\mathbf{F} = \frac{(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{r}_2)}{n_2} \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{n_1} \quad (25)$$

- действительная симметричная матрица) главным членом его асимптотического разложения, даваемого методом стационарной фазы [19, 22]. При этом учтем, что в первом

порядке параксиального приближения $\tau(\mathbf{p}_1)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\tau(\mathbf{p}_1) = \tau[1 + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{p}_1)]$ с постоянным множителем $\tau = \tau(0)$ и комплексным в

общем случае вектором \mathbf{f} ; поэтому вытекающая из (18) и (12) зависимость $\sigma(\mathbf{p}_1)$ с помощью

(20) и (22) представляется в достаточно простом виде $\sigma(\mathbf{p}_1) = \tau \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} [1 + (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p}_1)]$, где

$$D_0 = \det \mathbf{D} = \cos \theta_1 / \cos \theta_2 ,$$

$$\mathbf{h} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w}_2}{2n_2} - \frac{\mathbf{w}_1}{2n_1} + \mathbf{f} . \quad (26) \text{ В итоге,}$$

пользуясь формулами книги [22], нетрудно найти явное выражение для функции Грина

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} \frac{k\tau}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{F}}} \left[1 - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{ik}{2} \left((\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right) \right] \exp \left(\frac{i\pi}{4} \text{sgn } \mathbf{F} \right), \quad (27) \text{sgn } \mathbf{F} -$$

разность числа положительных и отрицательных собственных значений матрицы \mathbf{F} .

Интересно, что функция отклика (27) в данном приближении имеет привычный для параксиальных оптических систем вид функции Гаусса с мнимым коэффициентом в показателе степени. В более грубом геометро-оптическом приближении (при $k \rightarrow \infty$) она приобретает, как и должно быть, форму $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \delta(\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ (подобно случаю обычных проецирующих систем [5, 7], “дельтообразность” обеспечивается здесь тем, что вне узкого интервала, в котором аргумент экспоненты изменяется относительно медленно, функция $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ хотя и не является малой по абсолютной величине, однако чрезвычайно быстро осциллирует). Разумеется, тот же результат имеет место и при произвольных значениях k , если элементы матрицы \mathbf{F} равны нулю (это попросту означает отсутствие преломления или дифракции).

Если элементы матрицы $k^{-1}\mathbf{F}$ имеют малые, но все же конечные значения, то вклад подынтегрального выражения с функцией Грина (27) в определяющей комплексную амплитуду в точке \mathbf{r}_2 интеграл (13) является заметным лишь в ближайшей окрестности точки

$$\mathbf{r}_1 = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r}_2. \quad (28) \text{ Это означает, с другой}$$

стороны, что поле в некоторой точке на входной плоскости влияет на выходное поле лишь вблизи сопряженной точки выходной плоскости, местоположение которой определяется проективным приближением. Отличие (27) от функции Грина обычных параксиальных

систем [7] состоит в том, что форма и размеры “области влияния”, характеризуемые элементами матрицы $k^{-1}\mathbf{F}$, зависят от \mathbf{r}_2 и оказываются различными для разных пар сопряженных точек. Это обусловлено непостоянством эффективного расстояния между входной и выходной опорными плоскостями: там, где оно больше, больше и дифракционное “расплывание”, что расширяет область влияния.

По мере приближения к краю пучка с $\mathbf{r}_2 = 0$ размеры зоны влияния, а с ними и степень дифракционного преобразования структуры пучка уменьшаются. При $\mathbf{r}_2 = 0$ область влияния “стягивается” в точку, поскольку расстояние между сопряженными точками на ОП1 и ОП2 оказывается равным нулю, и дифракционное преобразование внутри ПДЭ отсутствует.

Кажется естественным ожидать подобное свойство у всех точек линии пересечения опорных плоскостей, но в действительности это не всегда так: если эта линия не лежит в плоскости границы $Z = 0$, что имеет место при $\psi \neq m\pi$ (m целое) и $\theta_j \neq 0$, то совпадающие точки ОП1 и ОП2 не являются сопряженными.

Линейные размеры области влияния по двум взаимно перпендикулярным направлениям определяются абсолютными величинами собственных значений матрицы $k^{-1}\mathbf{F}$. Используя то же μ , что и в (23), (24), имеем для характерного размера r_0 области

$$r_0^2(\mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{k} \left| \frac{(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{r}_2)}{n_2} \mu - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{n_1} \right| \equiv \frac{\Delta L(\mathbf{r}_2)}{k}.$$

Определяемая этим соотношением величина $\Delta L(\mathbf{r}_2)$ имеет смысл эффективного расстояния между сопряженными точками, которое соответствует фактическому дифракционному “расплыванию”. С помощью (22) и (28) ее можно представить в виде

$$\Delta L(\mathbf{r}_2) = \left| \frac{\Delta L_2(x_2)}{n_2} \mu \mp \frac{\Delta L_1(x_1)}{n_1} \right|, \quad (29) \text{ где}$$

$\Delta L_j(x_j) = |x_j \operatorname{tg} \theta_j|$ - расстояние от границы до точки \mathbf{r}_j , лежащей в j -той опорной плоскости (см. рис. 2, а). Последнее равенство выражает связь $\Delta L(\mathbf{r}_2)$ с относительным расположением опорных плоскостей и границы; при этом для ПДЭ, работающего в проходящем свете, верхний знак берется, когда сопряженные точки опорных плоскостей лежат по одну сторону границы, а для отражательного ПДЭ - когда одна из таких точек находится перед границей, а другая - за ней.

Наибольший размер области влияния достигается, вообще говоря, на самом удаленном от начала координат на рис. 2 крае пучка, где $|\mathbf{r}_j|$ можно положить равным характерному поперечному размеру пучка Δr_j . Соответственно, расстояние $\Delta L_j \equiv \Delta L_j(\Delta r_j) = |\Delta r_j \operatorname{tg} \theta_j|$, на котором j -ый пучок испытывает воздействие границы, может рассматриваться как длина части ПДЭ, приходящийся на этот пучок, а $\Delta L \equiv \Delta L(\Delta r_2) \approx \max[\Delta L(r_2)]$ - как эффективная длина ПДЭ. Данное определение вполне согласуется с рассуждениями, приведенными в разделе 1.

С помощью равенства (29) нетрудно получить полезные рецепты для оценок этой важной величины. Так, если положить $|x_2| = \Delta r_2$, $y_2 = 0$ (при этом $\Delta L_2 = \Delta L_2(x_2)$), то, согласно (21) и (28), $\Delta L_1(x_1) = |D_0 \operatorname{tg} \theta_1 \cos \psi| \Delta r_2 \approx \approx |\operatorname{tg} \theta_1 \cos \psi| \Delta r_1 = |\cos \psi| \Delta L_1$ (здесь мы использовали соотношение $(\Delta r_1/\Delta r_2) \approx \approx (\Delta p_2/\Delta p_1) \approx \sqrt{\mu}$ (см. (23)) и тот факт, что при не слишком различающихся μ_a и μ_b $\sqrt{\mu} \approx \sqrt{\mu_a \mu_b} = |D_0|$). Аналогичным образом, исходя из предположения $\Delta L_1 = \Delta L_1(x_1)$, можно показать, что $\Delta L_2(x_2) \approx |\cos \psi| \Delta L_2$. Следовательно, при близких μ_a и μ_b годится любое из практически равнозначных выражений

$$\Delta L \approx \left| \frac{\Delta L_i}{n_i} \mp |\cos \psi| \frac{\Delta L_j}{n_j} \right|, \quad i = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Ранее было рассмотрено условие малости дифракционных поправок в терминах угловых спектров (24). С помощью введенных величин удобно формулируется аналогичное условие для пространственных параметров. Очевидно, соответствующий безразмерный параметр $\varepsilon_r \ll 1$ можно представить в двух эквивалентных формах $\varepsilon_r = \frac{r_a^2(\Delta r_2)}{d_2^2} \approx n_2 \frac{\Delta L}{l_2}$, где d_j и l_j - характерные масштабы поперечной и продольной неоднородностей j -го пучка соответственно, причем $l_j = kn_j d_j^2$ [23].

Хотя эти выражения достаточно просты, порой их оказывается полезным модифицировать. В частности, удобны формулы

$$\varepsilon_r \approx \mu \left| \frac{\Delta L_i}{l_i} \mp |\cos \psi| \frac{\Delta L_j}{l_j} \right| \approx \frac{M^4}{k} \mu \left| \frac{|\operatorname{tg} \theta_j|}{n_i \Delta r_i} \mp |\cos \psi| \frac{|\operatorname{tg} \theta_j|}{n_j \Delta r_j} \right|. \quad (30) \text{ При}$$

выводе последнего выражения использовано соотношение $k \cdot d_j \cdot \Delta r_j \approx 1$ и введен фактор качества пучка $M^2 \approx \Delta r_j / d_j \approx k \Delta r_j \Delta r_j$ [24].

С помощью (23) и (30) легко установить связь ε_r с ранее введенным параметром ε (24) и записать обсуждаемое условие в виде

$$\varepsilon_r \approx M^2 \sqrt{\mu} \varepsilon \ll 1. \quad (31) \text{ Отсюда следует,}$$

что значительное превышение расходимости пучка над дифракционным пределом (M^2 велико) ужесточает количественные требования, вытекающие из неравенства (24).

Приступим наконец к вычислению явного вида закона преобразования комплексных амплитуд. Он определяется в результате подстановки функции Грина (27) в (13); получаемый при этом интеграл можно вычислить методом стационарной фазы, причем для учета членов первого порядка по ε в данном случае необходимо удержать два члена асимптотического разложения [22]. В результате находим

$$u_2(\mathbf{r}_2) = \tau \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} \left\{ u_1(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{2k} (\nabla_1 \cdot \mathbf{F} \nabla_1) \left[u_1(\mathbf{r}_1) + (\mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{r}_1 - \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{r}_2)) u_1(\mathbf{r}_1) \right] \right\}_{\mathbf{r}_1 = \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{r}_2} \quad (\text{здесь}$$

и далее $\nabla_j \equiv \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \right|$). Первое слагаемое, отвечающее главному члену разложения интеграла

(13), имеет нулевой порядок по ε и описывает проективное приближение; второе дает явное выражение для дифракционных поправок в первом порядке по ε . Раскрыв квадратные

скобки, можно привести его последний член к виду $-\frac{i}{k} (\mathbf{h} \cdot \nabla_1 u_1(\mathbf{r}_1))$, после чего, пользуясь

(22), (25) и (26), получаем уравнение связи входной и выходной комплексных амплитуд в

легко обозримом “симметричном” представлении

$$u_2(\mathbf{r}_2) = u_{20}(\mathbf{r}_2) + \tau \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} \frac{i \operatorname{tg} \theta_1}{2kn_1} \left[\frac{\partial u_1(\mathbf{r}_1)}{\partial x_1} + x_1 \nabla_1^2 u_1(\mathbf{r}_1) \right] - \\ - \frac{i \operatorname{tg} \theta_2}{2kn_2} \left[\frac{\partial u_{20}(\mathbf{r}_2)}{\partial x_2} + x_2 \nabla_2^2 u_{20}(\mathbf{r}_2) \right] - \frac{i}{k} (\mathbf{A} \mathbf{f} \cdot \nabla_2 u_{20}(\mathbf{r}_2)), \quad (32) \text{ где}$$

$$u_{20}(\mathbf{r}_2) = \tau \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} u_1(\mathbf{r}_1). \quad (33)$$

В (33) и во втором слагаемом (32) подразумевается, что \mathbf{r}_1 должно быть выражено через \mathbf{r}_2 с помощью (28); при записи второй строки (32) эта операция уже выполнена, в связи с чем введен дифференциальный оператор $\nabla_2 = \mathbf{D}\nabla_1$ и использовано (1). Обратим внимание на структуру поправки: собственно дифракционный вклад, определяемый только геометрией ПДЭ, описывается двумя первыми поправочными членами, а последний член соответствует учету природы и оптико-физических особенностей ПДЭ.

Фактически закон преобразования (32), (33) является лишь иным, но во многих отношениях более удобным выражением тех же закономерностей, что и функция Грина (27); однако следует иметь в виду, что удобство здесь достигается ценой сокращения области применимости, которую теперь определяет не (24), а более жесткое в общем случае условие (31).

Выведенные соотношения будут использованы во второй части работы для рассмотрения некоторых типичных ситуаций и решения ряда практически важных задач.

The research described in this publication was made possible in part by Grant NWG000 from the International Science Foundation.

Приложение

Энергетическая эффективность преобразования плоской волны в ПДЭ является отношением абсолютных величин выходного и входного потоков энергии. Эти потоки могут быть выражены как через функцию $u(\mathbf{r}, z)$, так и через ее Фурье-трансформанту $U(\mathbf{p})$:

$$\Phi = g_n \int |u(\mathbf{r}, z)|^2 (d\mathbf{r}) = g_n \int |U(\mathbf{p})|^2 (d\mathbf{p}), \quad (\text{П1}) \text{ где}$$

$g = c(8\pi k)^{-1}$. Поскольку для однородных неограниченных плоских волн интегралы здесь расходятся, рассмотрим случай, когда входной пучок имеет хотя и малую, но все же конечную ширину углового спектра.

Итак, будем считать, что функция $U_1(\mathbf{p}_1)$ заметно отличается от нуля только в малой окрестности некоторой точки $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$ (очевидно, неограниченная плоская волна $v_1(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{p}'_1)$ (смотри (6)) есть предельная форма этого пучка, к которой он стремится при стягивании указанной окрестности в точку). Угловой спектр соответствующего выходного пучка дается формулой (11); подставляя его в последний интеграл (П1) и выполняя в нем замену переменных, обратную (8), получаем выражение для выходного потока энергии

$$\Phi_2 = gn_2 \int |U_1[\mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2)] \sigma[\mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2)]|^2 \left| \frac{(dp_1)}{(dp_2)} \right|^2 (dp_2) = gn_2 \int |U_1(\mathbf{p}_1) \sigma(\mathbf{p}_1)|^2 \left| \frac{(dp_1)}{(dp_2)} \right| (dp_1).$$

Благодаря условиям, наложенным на функцию $U_1(\mathbf{p}_1)$, остальная часть подынтегральной функции при интегрировании может считаться постоянной и равной тому значению, которое

она принимает при $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$. В результате имеем $\Phi_2 \approx g \frac{n_2}{n_1} |\sigma(\mathbf{p}'_1)|^2 \left| \frac{(dp_1)}{(dp_2)} \right|_{\mathbf{p}_1=\mathbf{p}'_1} \cdot \Phi_1$, где

$\Phi_1 = gn_1 \int |U_1(\mathbf{p}_1)|^2 (dp_1)$ - поток энергии входного пучка, причем эта формула тем точнее, чем более узким является спектр $U_1(\mathbf{p}_1)$.

В предельном случае неограниченных плоских волн приходим к следующей точной формуле для эффективности преобразования:

$$|\tau(\mathbf{p}'_1)|^2 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{n_2}{n_1} |\sigma(\mathbf{p}'_1)|^2 \left| \frac{(dp_1)}{(dp_2)} \right|_{\mathbf{p}_1=\mathbf{p}'_1}. \quad (\text{П2}) \text{ Чтобы}$$

применить ее к (7), достаточно заменить \mathbf{p}'_1 на \mathbf{p}_1 .

С другой стороны, можно показать [20], что модуль коэффициента $\sigma(\mathbf{p}_1)$ связан с эффективностью преобразования энергии плоской волны соотношением $n_2 |\sigma(\mathbf{p}_1)|^2 |\cos(v_2, Z)| = n_1 |\tau(\mathbf{p}_1)|^2 |\cos(v_1, Z)|$, где (v_j, Z) - угол между направлением волны $v_j(\mathbf{r}_j, z_j, \mathbf{p}_j)$ и нормалью к границе. Сопоставляя этот результат с (П2), получаем удобную формулу связи якобиана преобразования (8) с геометрическими параметрами дифракции

$$\left| \frac{(dp_2)}{(dp_1)} \right| = \left| \frac{\cos(v_1, Z)}{\cos(v_2, Z)} \right|. \quad (\text{П3})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохов С.П., Марусий Е.Я., Соскин М.С. Перестраиваемые лазеры. М., 1982, 360 с.
2. Воронцов В.И., Пархоменко Ю.Н. // Укр. физ. журнал. 1980, Т. 25. С. 1251.
3. Ishiguro E., Iwanaga R., Takanori O. // J. Opt. Soc. Amer. 1979. V. 69. No 11. P. 1530.

4. Maystre D., Neviere M., Hunter W.R. // *Appl. Opt.* 1983. V. 24. No 2. P. 215.
5. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // *Опт. и спектр.* 1989. Т. 66. В. 3. С. 702-708.
6. Бекшаев А.Я. // *Опт. и спектр.* 1989. Т. 67. В. 2. С. 428-432.
7. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки.* М., 1990. 264 с.
8. Джеррард А., Берч Дж.М. *Введение в матричную оптику.* М., 1978. 342 с.
9. Анохов С.П. // *Квантовая электроника* 1994, т. 21. № 5, С. 433
10. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // *Опт. и спектр.* 1989. Т. 76. В. 4. С. 624-635.
11. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения.* М., 1989, 662 с.
12. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн.* М., 1990. 432 с.
13. Бельский А.М., Хапалюк А.П. // *Опт. и спектр.* 1973. Т. 35. В. 1. С. 117-119;
1975. Т. 38. В. 1, С. 154-158.
14. Вертий А.А., Звягина Г.А., Попенко Н.А. // *Известия ВУЗов. Радиофизика.* 1988. Т. 31. В. 5. С. 591-599.
15. Федосеев В.Г. // *Опт. и спектр.* 1991. Т. 71. В. 5. С. 829-834; В. 6. С. 992-997.
16. Bastiaans M.J. // *Opt. Four Dim. Conf. Engenada, 1981. N.Y., 1981. P. 292-312.*
17. Bastiaans M.J. // *Opt. Commun.* 1979. V. 30. P. 321-326.
18. Гудмен Дж. *Статистическая оптика.* М., 1988. 528 с.
19. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики.* М. 1973. 720 с.
20. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. *Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки.* Киев, 1986. 232 с.
21. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М. 1989. 655 с.
22. Федорюк М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды.* М. 1987. С.184-194
23. Бекшаев А.Я., Гримблатов В.М. // *Опт. и спектр.* 1989. Т. 66. В. 1. С. 248-250.
24. Siegman A.E. *Handbook of laser beam propagation and beam quality formulas using the spatial-frequency and intensity moment analysis. Draft version of 7/2/1991.* 36 p.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Прохождение светового пучка через ПДЭ.

а - отражение светового пучка от дифракционной решетки в автоколлимационном режиме; б - прохождение через границу раздела;

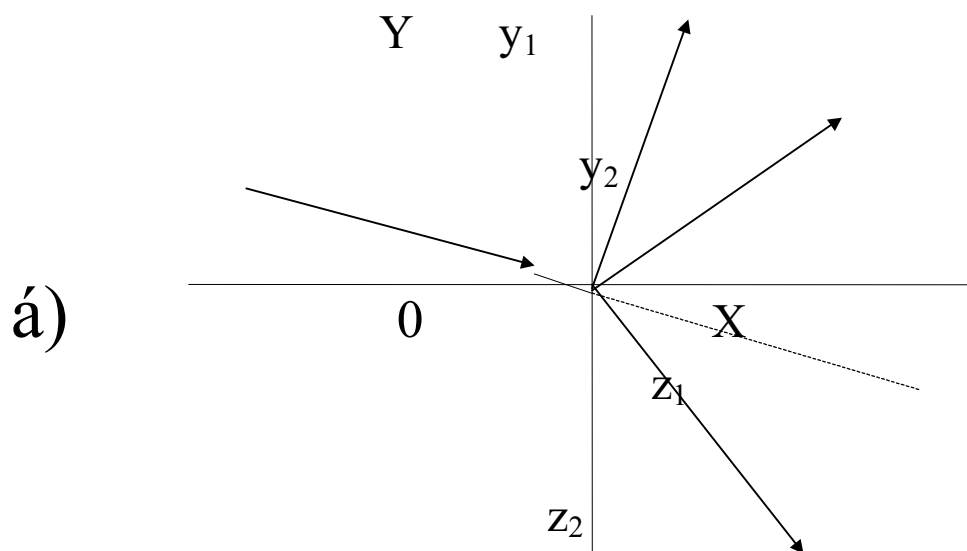
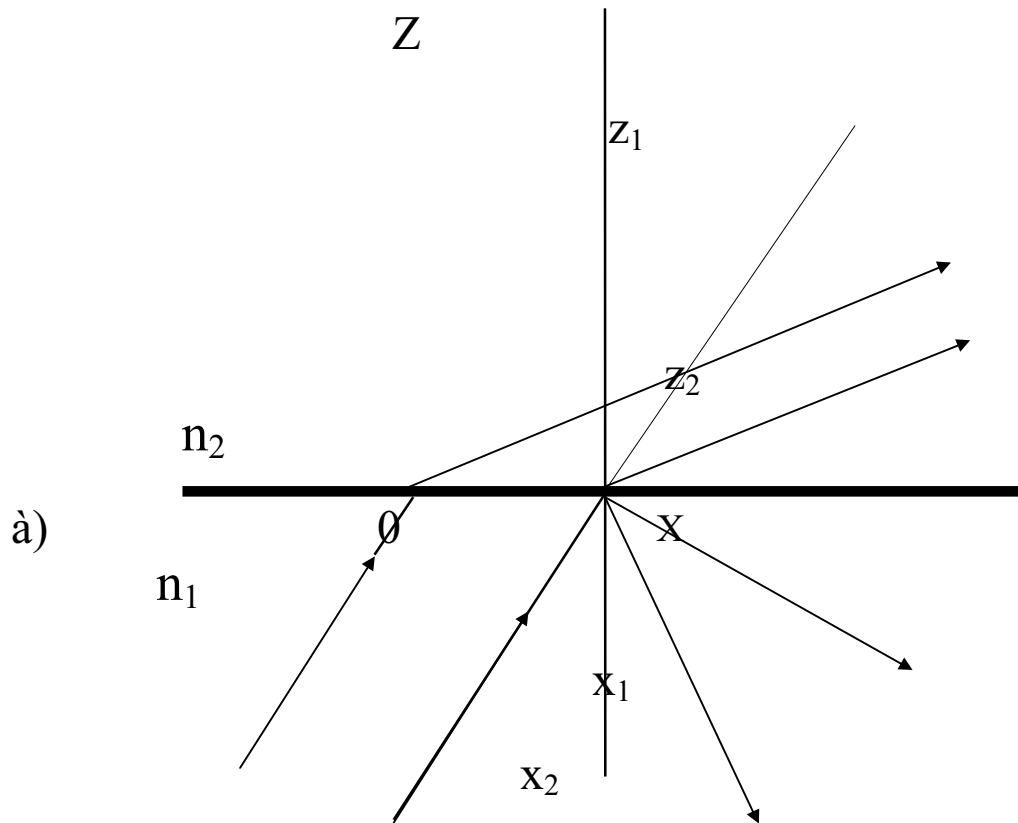
1, 2 - отсчетные плоскости.

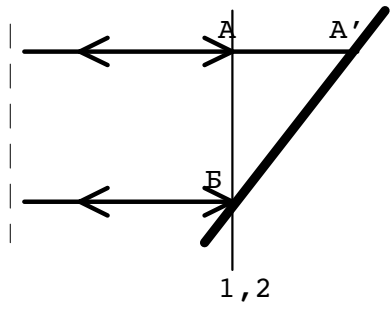
координатных осей.

а - вид в направлении оси Y (оси y_1 и y_2 не показаны),

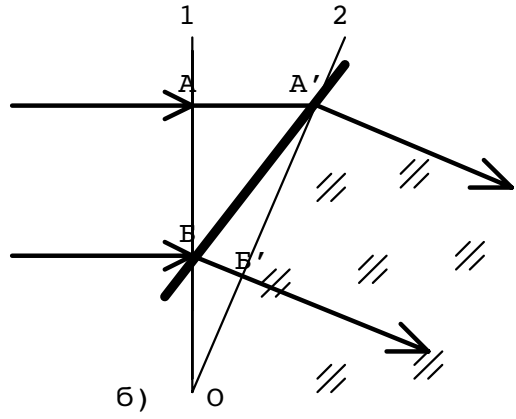
Рис. 2. Расположение

б - вид в направлении, противоположном оси Z (оси x_1 и x_2 не показаны).





a)



b)