

ИЗМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ ИХ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. II. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Ю.А.Ананьев, А.Я.Бекшаев

Найдены законы дифракционной перестройки структуры световых пучков при их прохождении через дисперсионные элементы в наиболее часто встречающихся на практике случаях. Рассмотрены также законы преобразования ряда энергетических характеристик пучков, поведение “центров тяжести” их поперечного и углового распределений и т.д. Обсуждаются также возможности применения полученных соотношений при проведении некоторых прецизионных измерений.

В предыдущей части нашей работы [1] были выведены законы прохождения через плоские дисперсионные элементы (ПДЭ) когерентных световых пучков с учетом происходящего при этом недавно открытого [2] эффекта дифракционной перестройки их структуры. Рассмотрим теперь некоторые следствия найденных уравнений преобразования.

1. Вид закона преобразования в некоторых важных частных случаях.

Прежде всего заметим, что на практике чаще всего приходится сталкиваться со сравнительно простыми ситуациями, в которых нет необходимости использовать громоздкие общие формулы. Так, плоскость падения пучка на решетку обычно совпадает с плоскостью дисперсии последней (оси z_1, z_2 перпендикулярны штрихам). Тогда в формуле (21) (нумерация формул и рисунков сквозная по обеим частям работы) следует положить $\psi = 0$, и $\mathbf{D} = \text{diag} [D_0, 1]$. Кроме того, из соображений симметрии вытекает четность функции $\tau(\mathbf{p}_1)$ относительно p_{1y} , откуда вытекает, что $\tau(\mathbf{p}_1) = \tau(0) \cdot (1 + f_x p_{1x})$. В результате, выразив все координаты через x_2 и y_2 , получаем из (32) и (33)

$$u_2(x_2, y_2) = u_{20}(x_2, y_2) + \frac{i}{2k} \left(\frac{D_0 \operatorname{tg} \Theta_1}{n_1} - \frac{\operatorname{tg} \Theta_2}{n_2} \right) x_2 \frac{\partial^2 u_{20}(x_2, y_2)}{\partial y_2^2} + \\ + \frac{i}{2k} \left(\frac{\operatorname{tg} \Theta_1}{D_0 n_1} - \frac{\operatorname{tg} \Theta_2}{n_2} \right) \left[\frac{\partial u_{20}(x_2, y_2)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 u_{20}(x_2, y_2)}{\partial x_2^2} \right] - \frac{i}{k} \frac{f_x}{D_0} \frac{\partial u_{20}(x_2, y_2)}{\partial x_2}, \quad (34)$$

$$\text{где } u_{20}(x_2, y_2) = \tau \sqrt{\frac{n_1}{n_2} |D_0|} u_1(D_0 x_2, y_2).$$

Характерно, что поправки не обращаются в нуль и при отсутствии дифракции на решетке, то есть когда $n_1 \sin \Theta_1 = n_2 \sin \Theta_2$. Таким образом, даже при обычном преломлении чисто геометрический расчет преобразования пучка на границе раздела, как это указывалось при обсуждении рис. 1, б, оказывается неточным.

При использовании дифракционной решетки в автоколлимационном режиме (рис. 1, а) пучки 1 и 2 распространяются в одной и той же среде, показатель преломления которой примем для простоты равным единице. Очевидно, здесь $\Theta_1 = \Theta$, $\Theta_2 = \pi + \Theta$; если положить

$$n_j = 1, \quad \text{tg } \Theta_j = \text{tg } \Theta, \quad \mathbf{D} = \text{diag} [-1, 1], \quad D_0 = -1, \quad (35) \text{ все}$$

предыдущие формулы становятся пригодны и к этому случаю. Отсчетные плоскости 1 и 2 здесь совпадают; изменив знак у x_2 , получаем общую для обоих пучков систему координат.

В результате, опустив индексы координат (\mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 теперь неразличимы), легко находим

$$u_2 = \tau \left[u_1(x, y) + i \left(\gamma - \frac{f_x}{k} \right) \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} + i \gamma x \nabla^2 u_1(x, y) \right], \quad (36) \text{ где}$$

$\gamma = \text{tg } \Theta / k$; τ тут имеет смысл “коэффициента отражения”, то есть амплитудной эффективности преобразования падающего на решетку излучения в соответствующий автоколлимации дифракционный порядок [1, 13].

Чтобы прояснить одно важное обстоятельство, рассмотрим изображенную на рис. 3 оптическую систему, содержащую ПДЭ и ограниченную двумя удаленными от ПДЭ плоскостями P_1 и P_2 , перпендикулярными осям z_j . Анализируя поведение некоего конкретного светового пучка в [1], мы для удобства обсуждения располагали начало координат O на том краю пучка, где он подвергается наименьшему дифракционному преобразованию. В принципе это вовсе не обязательно. Однако с переносом начала координат в другую расположенную на ПДЭ точку O' , который сопровождается параллельным сдвигом осей z_j , принимающих положения z'_j , изменяются оптические длины $n_1 \Delta z_1$ и $n_2 \Delta z_2$ разделенных дисперсионным элементом плечей системы. При наличии решетки изменяется и сумма этих длин, что является особенностью содержащих решетки систем - их общая оптическая длина, как известно, определена лишь с точностью до слагаемых, кратных длине волны [3]. Одновременно происходит перемещение опорных

плоскостей у решетки, а, следовательно, и изменение величин, входящих в уравнения (27), (32). Параметры преобразованного пучка при замене системы координат, естественно, измениться не могут; таким образом, вариации оптических длин должны в точности компенсироваться изменениями в указанных уравнениях. Покажем, что найденные законы преобразования действительно удовлетворяют этому условию.

В соответствии с общими правилами [4, 5] для функции Грина изображенной на рис. 1 оптической системы имеем

$$G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \int G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) (dr_1) (dr_2), \quad \text{где}$$

$\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2$ - радиус-векторы точек на плоскостях $P_1, 1, 2$ и P_2 соответственно. Интеграл в правой части нетрудно вычислить, пользуясь для функций Грина $G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1)$ и $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2)$ участков однородной среды стандартным выражением [4, 5] и беря $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в виде (14).

Выполнив затем подстановку (20), находим, что выражение для $G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)$ отличается от (27)

$$\text{только заменами } \mathbf{r}_j \text{ на } \mathbf{r}'_j \text{ и } \mathbf{F} \text{ на } \mathbf{F}' = \frac{(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{r}'_2) - \Delta z_2}{n_2} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{r}'_2) + \Delta z_1}{n_1} \quad (\text{как и в [1],}$$

$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ - скалярное произведение).

Посмотрим, как преобразуется это выражение при параллельном переносе оси z_2 на вектор \mathbf{a} . В этом случае $\mathbf{r}'_2 \rightarrow \mathbf{r}'_2 - \mathbf{a}$, $\Delta z_2 \rightarrow \Delta z_2 - \cos \Theta_2 (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{a}) = \Delta z_2 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a})$, $\Delta z_1 \rightarrow \Delta z_1 + \cos \Theta_1 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{a}) = \Delta z_1 + (\mathbf{D}\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{a})$ (использованы соотношения (3), (21), (22)). Отсюда следует, что значения величин $(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{r}'_2) - \Delta z_2$ и $(\mathbf{D}\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{r}'_2) + \Delta z_1$ (равные, кстати, расстояниям от границы до сопряженных точек плоскостей P_1 и P_2), а вместе с ними и \mathbf{F}' , при любом параллельном переносе осей z_j и соответствующем сдвиге опорных плоскостей остаются постоянными, что и доказывает искомый тезис.

Таким образом, развитый подход позволил ликвидировать кажущуюся неопределенность систем с ПДЭ, касающуюся их оптической длины.

2. Законы преобразования вектора Пойнтинга

Знание ФГ позволяет, руководствуясь стандартными правилами [4 - 7], найти законы преобразования в ПДЭ любых энергетических и корреляционных характеристик поля оптического пучка, включая распределения в фазовом (\mathbf{r}, \mathbf{p}) -пространстве (функции Вигнера [6, 8]) и функции когерентности. Среди упомянутых характеристик особенно

важным является вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга), компоненты которого непосредственно определяют пространственную локализацию пучка и картину переноса энергии. Это заслуживает приведенного далее более подробного рассмотрения; некоторые понадобятся при этом сведения приведены в Приложении.

Согласно [9], вектор Пойнтинга для параксиального пучка удобно записать в виде

$$\mathbf{S}_j = S_{jz} \mathbf{e}_{jz} + \mathbf{S}_{j\perp}, \quad (37) \text{ где } \mathbf{e}_{jz} - \text{орт}$$

продольной оси пучка, поперечная составляющая вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_{j\perp} = \begin{vmatrix} S_{jx} \\ S_{jy} \end{vmatrix}$ имеет

относительно продольной $S_{jz} \mathbf{e}_{jz}$ порядок малости Δr_j . Подставляя выражения (32), (33) в формулы Приложения (П.4, П.5) (формулы (П.1-П.3) приведены в Приложении к [1]), в первом порядке параксиального приближения можно получить

$$S_{2z}(\mathbf{r}_2) = |\tau^2 D_0| S_{1z}(\mathbf{r}_1) + \text{tg } \Theta_2 [S_{2x}(\mathbf{r}_2) + x_2 \nabla_2 S_{2\perp}(\mathbf{r}_2)] - |\tau^2 D_0| \text{tg } \Theta_1 [S_{1x}(\mathbf{r}_1) + x_1 \nabla_1 S_{1\perp}(\mathbf{r}_1)] + \\ + 2n_2 (\mathbf{A}f' \cdot \mathbf{S}_{2\perp}(\mathbf{r}_2)) + k^{-1} (\mathbf{A}f'' \cdot \nabla_2 S_{2z}^0(\mathbf{r}_2)), \quad (38)$$

$$\mathbf{S}_{2\perp}(\mathbf{r}_2) = \frac{n_1}{n_2} |\tau^2 D_0| \mathbf{D} \mathbf{S}_{1\perp}(\mathbf{r}_1) \quad (39) \text{ Как и в (32),}$$

здесь подразумевается, что \mathbf{r}_1 должно быть выражено через \mathbf{r}_2 посредством (28); $f' + if'' = \mathbf{f}$, $S_{2z}^0(\mathbf{r}_2) = gn_2 |u_{20}(\mathbf{r}_2)|^2 = |\tau^2 D_0| S_{1z}(\mathbf{r}_1)$. Уравнения (38) и (39) являются законами преобразования продольной и поперечной компонент плотности потока энергии. Отметим, что последнее из них описывает чисто проективное преобразование; причиной является то, что величины $|\mathbf{S}_{j\perp}|$ в параксиальном приближении малы сами по себе, и поправки к ним были бы меньше погрешностей уравнения (38).

Можно показать, что соотношения (38), (39) для когерентных пучков полностью эквивалентны равенствам (32), (33), однако в отличие от последних остаются пригодными и в случае неполной когерентности, когда пучок уже не может быть охарактеризован комплексной амплитудой. Особенно полезными они оказываются при изучении преобразований различных энергетических характеристик, являющихся функционалами от S_{jz} и $\mathbf{S}_{j\perp}$.

Найдем, в частности, закон преобразования полного потока энергии $\Phi = \int S_z(\mathbf{r}, z) (dr)$ в ПДЭ. Подставив сюда (38), получаем

$$\Phi_2 = \int S_{2z}(\mathbf{r}_2)(d\mathbf{r}_2) = |\tau^2 D_0| \int S_{1z}(\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_1) + \text{tg } \Theta_2 \int [S_{2x}(\mathbf{r}_2) + x_2 \nabla_2 S_{2\perp}(\mathbf{r}_2)](d\mathbf{r}_2) -$$

$$- |\tau^2 D_0| \text{tg } \Theta_1 \int [S_{1x}(\mathbf{r}_1) + x_1 \nabla_1 S_{1\perp}(\mathbf{r}_1)](d\mathbf{r}_1) + 2n_2(\mathbf{A}\mathbf{f}' \cdot \int \mathbf{S}_{2\perp}(\mathbf{r}_2)(d\mathbf{r}_2)) +$$

$$+ k^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{f}'' \cdot \int \nabla_2 S_{2z}^0(\mathbf{r}_2)(d\mathbf{r}_2)).$$
 Легко видеть, что третий интеграл после замены элемента площади в соответствии с вытекающим из (28) правилом

$$(d\mathbf{r}_2) = |D_0^{-1}|(d\mathbf{r}_1) \quad (40) \text{ становится}$$

подобным второму, и оба они вместе с последним в соответствии с (П.11) оказываются равными нулю. Вычислив оставшиеся члены с помощью (40) и (39), находим

$$\Phi_2 = |\tau|^2 \left[\Phi_1 + 2n_1(\mathbf{f}' \cdot \int \mathbf{S}_{1\perp}(\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_1)) \right]. \quad (41)$$

Как и следовало ожидать, собственно дифракционные члены (32), а также мнимая часть \mathbf{f} , описывающая фазовый скачок у прошедшей ПДЭ плоской волны, не вошли в выражение для результирующего полного потока энергии. Главный член (41) соответствует нулевому приближению [3, 10]; присутствие в поправочном члене плотности поперечного потока энергии объясняется тем, что самим своим происхождением $\mathbf{S}_{j\perp}$ обязано внеосевым составляющим углового спектра, для которых эффективность преобразования $|\tau(\mathbf{p}_1)|^2$ отличается от $|\tau|^2$.

Заметим, что на практике стремятся обычно к тому, чтобы эффективность ПДЭ в рабочем режиме (т.е. когда входная и выходная плоские волны имеют номинальные направления, которым соответствуют оси z_1 и z_2) была максимальной. В этом случае разложение функции $|\tau(\mathbf{p}_1)|$ в ряд Маклорена не содержит линейных членов; следовательно, $\mathbf{f}' = 0$, и преобразование полного потока энергии удовлетворительно описывается результатом нулевого приближения. В этом нет ничего удивительного, так как при $\mathbf{f}' = 0$ ПДЭ не меняет амплитуд отдельных составляющих углового спектра, а изменение их фаз никак не сказывается на величине переносимой ими энергии.

3. Поведение центров тяжести поперечного и углового распределений энергии светового пучка

Положения указанных центров тяжести, которые мы будем обозначать \mathbf{r}_0 и \mathbf{p}_0 соответственно, определяются формулами (П.6) и (П.7) Приложения. Эти величины широко используются в качестве характеристик расположения пучка в пространстве [11, 12];

помимо прочего, они могут быть достаточно просто измерены и потому являются возможными средствами проверки выведенных в настоящей работе соотношений.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением простейшего и чаще всего встречающегося на практике случая, когда эффективность преобразования всех компонент углового спектра примерно одинакова (смотри конец предыдущего раздела). Таким образом, ниже всюду будем считать выполненным условие $f' = 0$.

Начнем с расчета преобразования вектора \mathbf{r}_0 . В этом случае подстановка (38) в (П.6) с учетом (40), (41) и (П.10) позволяет получить для радиус-вектора центра тяжести выходного пучка представление

$$\mathbf{r}_{02} = \frac{1}{\Phi_2} \int \mathbf{r}_2 S_{2z}(\mathbf{r}_2) (d\mathbf{r}_2) = \mathbf{A}\mathbf{r}_{01} - k^{-1} \mathbf{A}\mathbf{f}'' + \Delta\mathbf{r}_0, \quad (42) \text{ где } \mathbf{r}_{01} -$$

радиус-вектор центра тяжести пучка на входной плоскости. Ясно, что первое слагаемое описывает результат нулевого приближения, а второе - сдвиг, обусловленный угловой зависимостью фазы амплитудной эффективности преобразования. Этот сдвиг имеет ту же природу, что и известный эффект Гуса - Хенхена [13, 14], и становится тождественным ему, если в рассматриваемом ПДЭ реализуется случай полного внутреннего отражения ($\Theta_1 > \arcsin(n_2/n_1)$, $\psi = 0$, $\Theta_2 = \pi - \Theta_1$; при этом f_x'' является угловой производной фазы коэффициента отражения). Величина и само существование этого сдвига зависят от природы ПДЭ; в частности, если условия дифракции таковы, что в рабочей области углов падения фаза $\tau(\mathbf{p}_1)$ в первом порядке по \mathbf{p}_1 постоянна, он равен нулю.

Особый интерес в (42) представляет третье слагаемое, которое определяет собственно дифракционную поправку, зависящую только от геометрии картины преобразования в ПДЭ. С помощью (П.12), (П.13) это слагаемое может быть приведено к виду

$$\Delta\mathbf{r}_0 = \frac{\text{tg } \Theta_2}{\Phi_2} \mathbf{J}_2 - \frac{\text{tg } \Theta_1}{\Phi_1} \mathbf{A} \mathbf{J}_1 = -\frac{1}{2kn_2} \mathbf{Q}_{21}^{(2)} \mathbf{w}_2 + \frac{\mathbf{A}}{2kn_1} \mathbf{Q}_{21}^{(1)} \mathbf{w}_1, \quad (43) \text{ где } \mathbf{J}_j$$

- интеграл вида (П.12), $\mathbf{Q}_{21}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}_{21}^{(2)}$ - матрицы смешанных вторых моментов [8] входного и выходного пучков, величины \mathbf{w}_j определяются формулой (22).

Далее, используя (П.8), (39) и (40), нетрудно получить правило преобразования матрицы \mathbf{Q}_{21} : из цепочки равенств
$$\frac{n_2}{\Phi_2} \int \mathbf{S}_{2\perp}(\mathbf{r}_2) \bar{\mathbf{r}}_2 (d\mathbf{r}_2) =$$

$$= \frac{n_2}{\Phi_2} \frac{n_1}{n_2} |\tau^2 D_0| \int \mathbf{D} \mathbf{S}_{1\perp}(\mathbf{r}_1) \tilde{\mathbf{r}}_1 \mathbf{D}^{-1} \frac{(d\mathbf{r}_1)}{|D_0|} = \mathbf{D} \frac{n_1}{\Phi_1} \int \mathbf{S}_{1\perp}(\mathbf{r}_1) \tilde{\mathbf{r}}_1 (d\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{D}^{-1} \quad \text{немедленно следует}$$

$\mathbf{Q}_{21}^{(2)} = \mathbf{D} \mathbf{Q}_{21}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$, и тогда вместо (43) получаем

$$\Delta \mathbf{r}_0 = -\frac{1}{2kn_2} \mathbf{D} \mathbf{Q}_{21}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{w}_2 + \frac{1}{2kn_1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{21}^{(1)} \mathbf{w}_1 . \quad (44)$$

Без особых сложностей выводится и аналогичная формула для преобразования вектора первого углового момента, который характеризует преимущественное направление распространения пучка и определяет положение его центра тяжести в дальней зоне. Здесь удобнее пользоваться законом преобразования угловых спектров (9); тогда, учитывая принятое условие $|\tau(\mathbf{p}_1)|^2 = |\tau|^2 = \text{const}$, с помощью формул (П.7) и (18) получаем

$$\mathbf{p}_{02} = \frac{gn_2}{\Phi_2} \int \mathbf{p}_2 |U_2(\mathbf{p}_2)|^2 (d\mathbf{p}_2) = \frac{gn_1}{\Phi_1} \int \mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1) |U_1(\mathbf{p}_1)|^2 (d\mathbf{p}_1) \quad (\text{напомним, что } g = c(8\pi k)^{-1})$$

; отсутствие $\tau(\mathbf{p}_1)$ в этом выражении объясняется тем, что характеристики углового распределения энергии не зависят от фаз отдельных составляющих углового спектра). Отсюда после подстановки (20) следует $\mathbf{p}_{02} = \mathbf{D} \mathbf{p}_{01} + \Delta \mathbf{p}_0$.

Здесь, как и в (42), разделены вклад нулевого приближения $\mathbf{D} \mathbf{p}_{01}$ и поправка

$$\Delta \mathbf{p}_0 = -\frac{g}{2\Phi_1} \int \mathbf{p}_1^2 |U_1(\mathbf{p}_1)|^2 (d\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{D} \mathbf{w}_1 + \frac{g}{2\Phi_1} \frac{n_1}{n_2} \int (\mathbf{D} \mathbf{p}_1)^2 |U_1(\mathbf{p}_1)|^2 (d\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{w}_2 .$$

Поскольку $\mathbf{p}_1^2 = \text{Sp}(\mathbf{p}_1 \tilde{\mathbf{p}}_1)$ и $(\mathbf{D} \mathbf{p}_1)^2 = \text{Sp}(\mathbf{D} \mathbf{p}_1 \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{D}}) = \text{Sp}(\mathbf{D} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{p}_1 \tilde{\mathbf{p}}_1)$, то с учетом (П.9) отсюда вытекает

$$\Delta \mathbf{p}_0 = -\frac{1}{4kn_1} \text{Sp}(\mathbf{Q}_{22}^{(1)}) \mathbf{D} \mathbf{w}_1 + \frac{1}{4kn_2} \text{Sp}(\mathbf{D} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{Q}_{22}^{(1)}) \cdot \mathbf{w}_2 , \quad (45) \text{ где } \mathbf{Q}_{22}^{(1)}$$

- матрица вторых угловых моментов [8] входного пучка.

Примечательность соотношений (44), (45) заключается в том, что они связывают изменения положения центра тяжести пучка после прохождения ПДЭ с формой пространственно-углового распределения энергии в падающем пучке, которую характеризуют вторые моменты [8]¹. Эта связь наиболее проста в случае автоколлимационного отражения, когда справедливы равенства (35). Тогда после

¹Вообще говоря, вторые моменты характеризуют не только форму пучка, но и его расположение относительно начала координат. Зная \mathbf{p}_{01} и \mathbf{r}_{01} , можно перейти к соответствующим центральным моментам [8]; если же входные пучок и плоскость расположены так, что $\mathbf{r}_{01} = \mathbf{p}_{01} = 0$, то равенства (44) и (45) содержат именно центральные моменты, и параметры \mathbf{r}_{02} , \mathbf{p}_{02} определяются только структурами ПДЭ и входного пучка.

соответствующих подстановок и замены направления оси x_2 (подобно тому, как это было сделано при выводе (36)) вместо (44) получаем

$$\Delta x_0 = \gamma \left(Q_{21}^{(1)} \right)_{xx}, \quad \Delta y_0 = \gamma \left(Q_{21}^{(1)} \right)_{yx} \quad (46) \text{ (здесь, как и в}$$

(36), $\gamma = \text{tg } \Theta / k$, индексы xx и yx соответствуют элементам первого столбца матрицы), а вместо (45)

$$\Delta p_{0x} = \frac{1}{2} \gamma \text{Sp} \left(\mathbf{Q}_{22}^{(1)} \right), \quad \Delta p_{0y} = 0 \quad (47)$$

Эти равенства отражают основные закономерности дифракционного преобразования \mathbf{r}_0 и \mathbf{p}_0 в ПДЭ любой геометрии. Хотя они и вытекают из формул (44) и (45), но благодаря простоте их анализ более нагляден. Прежде всего, простое сопоставление (46) и формулы (П.8) говорит о том, что Δx_0 и Δy_0 определяются средними по сечению входного пучка значениями компонент $x \cdot \text{tg } \Theta \cdot \mathbf{S}_{1\perp}(x, y)$. Поскольку вектор $\mathbf{S}_{1\perp}(x, y)$ характеризует поперечный “дрейф” энергии, заключенной в элементе объема пучка вблизи точки (x, y) опорной плоскости, а $x \cdot \text{tg } \Theta$ - расстояние от этого элемента объема до решетки, то становится ясным, что Δx_0 и Δy_0 являются компонентами эффективного поперечного сдвига “энергетического тела” пучка на его пути от опорной плоскости к решетке и обратно.

Одновременно находит свое объяснение и тот странный, на первый взгляд, факт, что хотя условия автоколлимационного отражения абсолютно симметричны относительно плоскости $y = 0$, величина Δy_0 в общем случае не равна нулю. Это является следствием возможной асимметрии входного пучка; так, уже в том случае, когда $\mathbf{S}_{1\perp}(x, y)$ является четной функцией x , величина Δy_0 обращается в нуль, поскольку эффективные сдвиги “верхней” (лежащей в области $x > 0$) и “нижней” половин пучка взаимно компенсируются.

Величина же изменения \mathbf{p}_0 , как и следовало ожидать, совершенно не зависит от поперечного профиля интенсивности входного пучка. Более интересно то, что она оказывается не зависящей также и от характера симметрии углового спектра, так что результат всецело определяется свойствами ПДЭ. Легко видеть, в частности, что при любых поворотах пучка произвольной формы вокруг продольной оси благодаря инвариантности следа матрицы моментов величина правой части первого из равенств (47) остается неизменной. Заметим, что формулы (47) могут быть легко объяснены при использовании явного вида зависимости \mathbf{p}_2 от \mathbf{p}_1 (смотри формулу (8) и комментарии к ней в [1]) для

случая автоколлимационного отражения; эта зависимость может быть найдена подстановкой (35) в (20) и (22).

Теперь оценим возможную величину обсуждаемых эффектов. Для этого ограничимся рассмотрением случая, когда на вход ПДЭ поступает осесимметричный гауссов пучок с распределением комплексной амплитуды $u_1 = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - i\frac{k}{\rho}\right)r^2\right]$, где b -

размер пятна, ρ - радиус кривизны волнового фронта. В этом случае согласно [8]

$\mathbf{Q}_{21}^{(1)} = \frac{kb^2}{\rho} \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}_{22}^{(1)} = \left(\frac{kb^2}{\rho^2} + \frac{1}{kb^2}\right) \mathbf{I}$, где \mathbf{I} - единичная 2×2 матрица. Подставив это в (46)

и (47), получаем

$$\Delta x_0 = \text{tg } \Theta \frac{b^2}{\rho}, \quad \Delta p_{0x} = -\text{tg } \Theta \left(\frac{b^2}{\rho^2} + \frac{1}{k^2 b^2}\right).$$

Задаваясь типичными значениями $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $b = 0,1 \text{ см}$, $\rho = 10^2 \text{ см}$, находим $\Delta x_0 \approx (10^{-4} \text{ tg } \Theta) \text{ см}$, $|\Delta p_{0x}| \approx 10^{-6} \text{ tg } \Theta$, что при разумных значениях $\text{tg } \Theta = (1 \div 10)$ не только вполне доступно для измерений, но и может заметно сказаться на свойствах содержащего ПДЭ резонатора или других устройств.

4. Возможности применения ПДЭ в измерениях моментов интенсивности световых пучков

Некоторые следствия найденных правил преобразования, в частности, уравнения (44) - (47) порождают определенную надежду на то, что они смогут пригодиться при исследовании пространственно-угловых характеристик световых пучков.

Это касается, в частности, пресловутых моментов интенсивности; хотя неадекватность выработанного с их помощью “критерия качества” (на что мы указывали еще в [8]) сейчас становится очевидной, в ряде случаев полезность этих моментов безусловна. Вместе с тем, обычные способы измерения моментов не всегда удовлетворяют практическим критериям удобства, быстроты и эффективности. Важно и то, что прямому измерению поддаются только элементы матриц \mathbf{Q}_{11} и \mathbf{Q}_{22} , которые непосредственно связаны с распределением интенсивности в рассматриваемом сечении и в дальней зоне пучка, смешанные же моменты, образующие матрицу \mathbf{Q}_{21} , можно определять лишь косвенными методами (скажем, сравнивая значения \mathbf{Q}_{11} в разных сечениях).

Возможный способ прямого определения элементов матрицы \mathbf{Q}_{21} связан с использованием равенства (46) (хотя в нем фигурируют элементы только первого столбца, разворот пучка относительно решетки на 90° позволяет найти элементы и правого столбца). Осложнения, вызванные возможным отличием $\Delta \mathbf{r}_0$ от непосредственно измеримого сдвига центра тяжести пучка из-за наличия в (42) второго слагаемого, не носят принципиального характера. Они могут быть преодолены как специальным выбором конструкции ПДЭ, гарантирующим выполнение условия $\mathbf{f} = 0$, так и посредством независимого измерения обусловленной ненулевым \mathbf{f} части общего сдвига при помощи калибровочного пучка с известной матрицей \mathbf{Q}_{21} (в частности, для этого удобны пучки с плоскими фронтами, у которых $\mathbf{Q}_{21} = 0$ [8]).

Еще одно достоинство обсуждаемого способа определения моментов связано с тем, что существуют довольно точные экспрессные методики измерения координат центров тяжести произвольных пучков (смотри, например, [19]), которые не нуждаются в прецизионном профилировании пучка и последующей математической обработке. Благодаря этому может оказаться, что даже характеристики матрицы \mathbf{Q}_{22} будет выгоднее определять через сдвиг центра тяжести углового распределения энергии с помощью равенств (45) и (47).

Разумеется, при практической реализации подобных методик могут возникнуть трудности, связанные с необходимостью измерения малых поправок $\Delta \mathbf{r}_0$, $\Delta \mathbf{p}_0$ (об этом, казалось бы, свидетельствуют и приведенные в конце раздела 3 оценки). Кроме того, возможная на практике зависимость τ от \mathbf{p}_1 или от \mathbf{r}_2 способна заметно снизить точность основных соотношений (44) - (47). Однако возможности конкретных измерительных схем и пути их оптимизации нами пока не рассматривались. Поэтому есть определенные основания полагать, что предлагаемый подход к измерению вторых моментов не лишен перспективы, особенно если учесть все трудности точного профилирования пучка, присущие обычным методикам.

5. Обсуждение результатов

В заключение обсудим пределы применимости и возможные обобщения полученных результатов.

В основе данной работы лежат соотношения (10), (11) и (14), которые для рассматриваемой модели ПДЭ можно считать вполне строгими, так как они базируются только на общих законах распространения волн в присутствии плоских границ раздела и

решеток. Эти соотношения в принципе допускают как детерминированное, так и статистическое (с очевидными модификациями [15]) описание преобразований произвольных световых пучков с учетом их электромагнитной природы и поляризационных свойств. Характерно, что указанные соотношения сохраняют силу и для некоторых элементов, не являющихся плоскими и поэтому обладающими более сложной, чем оговаривалось в начале работы, структурой. Важно лишь, чтобы при поступлении на их вход плоской волны на выходе получалась бы плоская же волна с однозначной функциональной связью \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_1 . Это имеет место, например, для сочетаний последовательно расположенных ПДЭ, разделенных промежутками, заполненными однородной средой. Отметим только, что в подобных случаях вследствие зависимости условий преобразования от состояния поляризации может потребоваться матричное представление для $\sigma(\mathbf{p}_1)$ и, соответственно, для функций отклика $K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ и $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$; это, однако, не должно сказаться ни на идеологии, ни на практической выполнимости расчетов.

Главные трудности, с которыми придется столкнуться в ходе подобного анализа, носят, пожалуй, технический характер. Они связаны в первую очередь с определением реального вида функции $\sigma(\mathbf{p}_1)$, что является предметом многочисленных специальных исследований (смотри, например, [13, 16]) и выходит за рамки данной работы. Кроме того, при учете точных зависимостей $\tau(\mathbf{p}_1)$ и $\mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1)$ или их улучшенных аппроксимаций неизбежен рост сложности вычислений. Тем не менее надежный путь получения конечных результатов по крайней мере в численном виде вполне ясен.

Насколько велика потребность в таких обобщениях, подскажет только практика разработок и исследований реальных оптических схем с ПДЭ. Тем не менее, к некоторым полезным выводам приводит уже внимательное рассмотрение роли параксиального приближения, которое позволило в настоящей работе довести до конца аналитические выкладки и представить результаты в достаточно удобной и поддающейся исследованию форме.

Можно заметить, что помимо предоставления самой возможности прибегнуть к скалярным функциям распределения поля оно использовалось нами двояким образом. Первое его следствие, основанное на условии (19) - возможность линейной аппроксимации функции $\tau(\mathbf{p}_1)$, благодаря чему из всей совокупности оптико-физических характеристик ПДЭ существенными для рассматриваемой задачи оказались только компоненты комплексного вектора \mathbf{f} . При этом в большинстве практически важных ситуаций

достаточно знать лишь f_x (если, как было принято при выводе (34), плоскость падения совпадает с плоскостью дисперсии) или даже один единственный параметр f_x'' (если эффективность преобразования в номинальном режиме работы ПДЭ максимальна, смотри конец раздела 2). Строго говоря, без знания истинного вида функции $\tau(\mathbf{p}_1)$ судить о допустимости такой аппроксимации нельзя, однако бесспорно, что она заведомо справедлива во многих реальных ситуациях. В качестве примера можно указать случай полного внутреннего отражения, когда линейное представление $\tau(\mathbf{p}_1)$ остается пригодным пока угол Θ_1 не слишком близок к прямому [13]; естественно ожидать подобного поведения и от других типов ПДЭ.

Параксиальное приближение использовалось также для упрощения функции $\mathbf{p}_2(\mathbf{p}_1)$ и вывода условий малости дифракционных поправок в законе преобразования комплексной амплитуды, что привело к неравенству (24) и его усиленному варианту (31). Эти условия определяются только геометрией преобразования в ПДЭ и поэтому могут быть исчерпывающе проанализированы на основе материалов настоящей работы. В частности, выражение (30) свидетельствует о том, что применимость закона преобразования (32) определяется в сущности величинами $M^4 \operatorname{tg} \Theta_j / \Delta r_j$, то есть и здесь ситуация наиболее критична в области скользящих углов падения или дифракции. Допустимую степень близости Θ_j к прямому углу нетрудно оценить, взяв в качестве примера Эрмитов пучок с поперечными индексами m и n , для которого $M^2 = m + n + 1$ [17]; тогда (31) удовлетворяется при $\operatorname{tg} \Theta_j \ll k \Delta r_j (m + n + 1)^{-2}$. Это позволяет и понять, что уравнение преобразования (32) с его следствиями имеют достаточно большую область пригодности, и распознавать признаки тех реальных ситуаций, которые требуют намеченного выше усовершенствованного подхода.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос об учете поляризации излучения. Ряд чисто формальных признаков (например величина и структура периода решетки) говорит о том, что векторный характер поля электромагнитных волн почти всегда должен играть заметную роль в процессе их прохождения через ПДЭ [16]; поэтому представленная скалярная теория имеет, казалось бы, весьма ограниченную ценность. Однако на деле во многих применениях ПДЭ (скажем в дисперсионных резонаторах) поляризация излучения согласована с ориентацией ПДЭ и везде одинакова; в подобных случаях использование результатов данной работы вполне корректно.

Зато вполне реальным недостатком использованной нами модели, основанной на исходном предположении о преобразовании плоской в плоскую же волну, является невозможность последовательного рассмотрения преобразования в пространственно неоднородных ПДЭ. И здесь, однако, допустим чисто феноменологический учет плавной неоднородности посредством введения пространственно-зависимого коэффициента преобразования $\tau(\mathbf{r}_2)$ в результирующие уравнения (27) или (32). Детали и корректность этой процедуры требуют специального исследования, но представляется, что в условиях справедливости приближения Кирхгофа она столь же естественна, как введение переменных по сечению коэффициентов отражения или пропускания [18].

Описанное в настоящей публикации исследование выполнено благодаря гранту NWG000 Международного Научного Фонда.

Приложение

Ниже приведены необходимые соотношения для энергетических характеристик параксиальных световых пучков. Всюду предполагается, что используется связанная с пучком система координат.

При том условии, что комплексная амплитуда пучка $u(\mathbf{r}, z)$ задает величину поперечной компоненты напряженности электрического поля, компоненты вектора Пойнтинга (37) выражаются уравнениями

$$S_z(\mathbf{r}, z) = gn |u(\mathbf{r}, z)|^2, \quad (\text{П.4})$$

$$\mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}, z) = g \frac{i}{2k} [u(\mathbf{r}, z) \nabla u^*(\mathbf{r}, z) - u^*(\mathbf{r}, z) \nabla u(\mathbf{r}, z)], \quad (\text{П.5}) \text{ где}$$

$g = c(8\pi k)^{-1}$, c - скорость света в пустоте, n - показатель преломления среды (эти формулы следуют из результатов [9], немного отличаясь от них из-за того, что там напряженность поля считалась равной $n^{-1/2} u(\mathbf{r}, z)$).

Из равенств (П.1) работы [1] для полного потока переносимой пучком энергии вытекают следующие удобные представления для пространственно - угловых координат центра тяжести распределения энергии (компонент вектора первых моментов интенсивности [8]):

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int \mathbf{r} |u(\mathbf{r}, z)|^2 (d\mathbf{r})}{\int |u(\mathbf{r}, z)|^2 (d\mathbf{r})} = \frac{1}{\Phi} \int \mathbf{r} S_z(\mathbf{r}, z) (d\mathbf{r}), \quad (\text{П.6})$$

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\int \mathbf{p} |U(\mathbf{p})|^2 (d\mathbf{p})}{\int |U(\mathbf{p})|^2 (d\mathbf{p})} = \frac{gn}{\Phi} \int \mathbf{p} |U(\mathbf{p})|^2 (d\mathbf{p}). \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что из (П.4) и (П.5) вытекает также связь компонент плотности потока энергии с введенной в [8] матрицей \mathbf{Q}_{21} смешанных моментов пучка:

$$\mathbf{Q}_{21} = i \frac{\int (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{r}} (d\mathbf{r})}{\int |\mathbf{u}|^2 (d\mathbf{r})} = \frac{2kn}{\Phi} \int \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}, z) \tilde{\mathbf{r}} (d\mathbf{r}) \quad (\text{П.8}) \text{ (здесь, как и}$$

езде, $\nabla = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{vmatrix}$, вектор-столбец \mathbf{S}_\perp умножается на строку $\tilde{\mathbf{r}}$ по правилам перемножения матриц). Эта формула позволяет трактовать смешанные моменты как средневзвешенные значения компонент плотности поперечного потока энергии.

Для остальных блоков матрицы вторых моментов [8] нетрудно записать аналогичные (П.6) - (П.8) представления. В частности, матрица вторых угловых моментов, фигурирующая в (45), имеет вид

$$\mathbf{Q}_{22} = 2k \frac{gn}{\Phi} \int \mathbf{p} \tilde{\mathbf{p}} |U(\mathbf{p})|^2 (d\mathbf{p}). \quad (\text{П.9})$$

Компоненты плотности потока энергии ограниченного пучка удовлетворяют следующим интегральным соотношениям, применяемым нами при выводе формул (41) - (43):

$$\int \mathbf{r} \cdot (\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{S}_z) (d\mathbf{r}) = -\mathbf{f} \int \mathbf{S}_z (d\mathbf{r}), \quad (\text{П.10}) \text{ (}\mathbf{f} \text{ -}$$

постоянный вектор),

$$\int [S_x(\mathbf{r}) + x \nabla S_\perp(\mathbf{r})] (d\mathbf{r}) = \int \nabla [x S_\perp(\mathbf{r})] (d\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{П.11})$$

$$\int \mathbf{r} \cdot [S_x(\mathbf{r}) + x \nabla \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r})] (d\mathbf{r}) = -\int x \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}). \quad (\text{П.12}) \text{ Эти}$$

формулы легко доказываются с помощью интегрирования членов, содержащих компоненты $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, по частям при учете того, что при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ величина $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ обращается в нуль.. Вид правой части (П.12) позволяет установить связь выражений, содержащих последний

интеграл, с (П.8). В частности, при $\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \text{tg } \Theta \\ 0 \end{vmatrix}$ имеем

$$\text{tg } \Theta \int x \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}) = \int \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) (d\mathbf{r}) = \int \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{w}) (d\mathbf{r}) =$$

$$= \int (\mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{w}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\Phi}{2kn} \mathbf{Q}_{21} \mathbf{w}, \quad (\text{П.13}) \text{ где скалярное}$$

произведение $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$ представлено в виде матричного произведения строки на столбец и использована ассоциативность умножения матриц.

Литература

1. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр. 1995, Т. 78, В. 5, С. 1-9
2. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр. 1994, Т. 71, В. 5, С. 1-9
3. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр. 1989, Т. 66, В. 3, С. 702-708
4. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М., "Наука", 1990, 264с.
5. Anan'ev Yu. Laser Resonators and the Beam Divergence Problem. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1992, 460 pp.
6. Bastiaans M.J. // Opt. Four Dimen. Conf., Eugena, 1981. New York, 1981, pp. 292-312
7. Bastiaans M.J. // Opt. Commun., 1979, v. 30, pp.321-326
8. Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр. 1994, Т. 76, С. 624-635
9. Бекшаев А.Я., Гримблатов В.М. // Опт. и спектр. 1989, Т. 66, В. 1, С. 248-250
10. Бекшаев А.Я. // Опт. и спектр. 1989, Т.67, В. 2, С. 428-432
11. Федосеев В.Г. // Опт. и спектр. , 1991, Т. 71, В.5, С. 829 - 834; В. 6, С. 992-997
12. Маркузе Д. Оптические волноводы. М., 1974
13. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М., "Мир", 1989, 662 с.
14. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., "Наука", 1990. 432 с.
15. Гудмен Дж. Статистическая оптика. М., "Мир", 1988, 528 с.

16. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки. Киев, 1986. 232 с.
17. Siegman А.Е. Handbook of laser beam propagation and beam quality formulas using the spatial-frequency and intensity moment analysis. Draft version of 7/2/1991. 36 p.
18. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., “Наука”, 1973, 720с.
19. Бекшаев А.Я., Гримблатов В.М., Окунишников О.Н. // Измерительная техника, 1988, N 5, С. 28 - 29

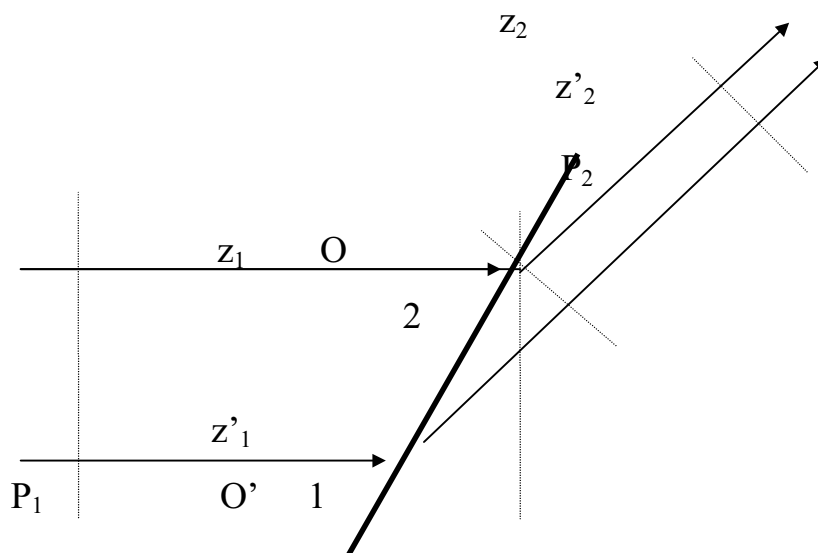


рис. 3